

Сознание, философия и математика

Лёйтзен Эгберт Ян Брауэр

1949

Точка зрения, что нет не подтверждённых опытом истин, и что логика не является абсолютно надёжным инструментом для совершения открытий, нашла поддержку в математике гораздо позже, чем в обычной жизни и науке. Математика, рассматриваемая строго с *этой* точки зрения, включая вывод теорем исключительно при помощи интроспективных конструкций, называется интуиционистской математикой. Она во многом отличается от классической математики. Во-первых, тем, что классическая математика использует логику для своих построений и доказательств, верит в существование непознанных истин и, в частности, использует *принцип исключённого третьего*. Последний означает, что любое математическое утверждение (то есть утверждение о математическом свойстве математического объекта) либо истинно, либо ложно. Во-вторых, классическая математика рассматривает только *полностью определённые* бесконечные последовательности, то есть такие, для которых элемент x_n зафиксирован для каждого n . Из-за этого ограничения классическая математика вынуждена определять действительное число как заранее определённую сходящуюся бесконечную последовательность рациональных чисел. Из вещественных чисел, определенных таким образом, лишь подвид "всегда бесконечно перечислимые" вида "действительные числа" может быть построен методом интроспективной конструкции. Поскольку эти бесконечно перечислимые виды все имеют меру нуль, классической математике, для того чтобы создать из точек континуум, приходится задействовать какой-либо логический процесс, начинающийся с одной или нескольких аксиом. Следовательно, мы можем сказать, что классический анализ, как бы он ни подходил для техники и науки, содержит меньше математического смысла, чем интуиционистский анализ, который для построения континуума использует свободно становящиеся последовательности рациональных чисел и не использует при этом логики.

Кроме того, языки, которые используют эти математические школы, также отличаются. Даже для теорий, описанных нейтральным языком, то есть языком, принимаемым обеими школами, каждая школа использует свои математические объекты. Существуют интуиционистские структуры, к которым нельзя применять классические логические схемы, и наоборот: классические аргументы, не применимые к интроспективным. Более того, для таких теорий и объектов, признанных обеими школами, существуют теоремы, которые в другой теории будут ложными, противоречивыми или даже бессмысленными. В частности, теоремы, верные в интуиционизме, а не классической математике, зачастую происходят из того обстоятельства, что для математических сущностей, принадлежащих определенному виду, обладание определенным свойством определяет особый тип их развития из базисной интуиции, и (именно) из этого особого типа развития из базисной интуиции следуют свойства, неверные в классической математике. Одним из поразительных примеров является интуиционистская теорема о том, что функция, определённая на отрезке $[0, 1]$, то есть функция, ставящая в соответствие каждому неотрицательному действительному числу произвольное действительное число, является абсолютно непрерывной.

Чтобы объяснить последствия отказа от принципа исключённого третьего, как инструмента доказательств, мы должны сформулировать его в следующей немного изменённой, интуиционистски более адекватной форме, называемой *простым принципом исключённого третьего*:

Любое утверждение τ о свойстве математического объекта может быть физически проверено¹: либо доказано, либо приведено к противоречию.

¹ *can be judged* в оригинале — прим.пер.

Тогда для отдельно взятого такого утверждения τ этот принцип непротиворечив как в классической, так и в интуиционистской математике. Действительно, если он был противоречив, то нашлось бы утверждение τ , являющееся одновременно истинным и ложным² одновременно, что невозможно. Более того, несложно доказать, что для *конечного* числа таких утверждений выполнение принципа одновременно для каждого утверждения также непротиворечиво. Тем не менее, для произвольного набора утверждений одновременное выполнение этого не может быть использовано.

Например, для определённого действительного числа c_1 утверждение «УТВЕРЖДЕНИЕ " c_1 рационально" МОЖЕТ БЫТЬ ЛИБО ДОКАЗАНО, ЛИБО ОПРОВЕРГНУТО» не ведёт к противоречию. Более того, если $c_1, c_2 \dots c_m$ — действительные числа, никакое из утверждений для $\nu = 1, 2 \dots m$ «УТВЕРЖДЕНИЕ " c_ν рационально" МОЖНО ДОКАЗАТЬ ИЛИ ОПРОВЕРГНУТЬ» не может привести к противоречию. Однако, это же утверждения сразу для *всех* действительных чисел: «УТВЕРЖДЕНИЕ " c рационально" МОЖЕТ БЫТЬ ДОКАЗАНО ИЛИ ОПРОВЕРГНУТО» ведёт к противоречиям.

Следовательно, если мы переформулируем *полный принцип исключённого третьего* в следующей форме:

Пусть a, b и c — математические объекты, причём a и b являются частью c . Если b состоит из элементов c , которые не могут лежать в a , то c является объединением a и b

то предыдущий принцип исключённого третьего будет противоречивым.

Из простого принципа исключённого третьего можно получить предложение:

Если для утверждения τ о некотором свойстве математического объекта его непротиворечивость (то есть отрицание³ отрицания) была доказана, то истинность τ также может быть доказана.

Аналогичное предложение можно получить из полного принципа исключённого третьего:

Пусть a, b и c — математические объекты, причём a и b являются частью c . Если b состоит в точности из тех элементов c , которые не могут лежать в a , то a состоит из тех элементов c , которые не могут лежать в b .

Из простого принципа исключённого третьего также можно получить *принцип проверяемости*:

Каждое утверждение τ о свойстве математического объекта может быть проверено⁴, то есть доказана либо непротиворечивость, либо абсурдность.

Аналогично из полного принципа исключённого третьего можно получить *полный принцип проверяемости*:

Пусть a, b, d и c — математические объекты, причём a, b и d являются частью c . Если b состоит из элементов c , которые не принадлежат a , а d — из элементов c , которые не принадлежат b , то c является объединением b и d .

Для интуиционизма принцип исключённого третьего и следующие из него предложения являются утверждениями σ от утверждения τ , и эти утверждения σ только тогда выполняются (то есть выражают истину), если эти утверждения были физически проверены⁵.

Каждое утверждение τ о возможности построения ограниченного конечного объекта в конечной математической системе представляет собой случай реализации принципа исключённого третьего. Для каждой такой конструкции каждое действие можно быть проделано лишь конечным числом способов, причём каждый из них даст положительный или отрицательный ответ за конечное число шагов.

² *absurd* в оригинале — прим.пер.

³ *отрицание* и *абсурдность* в тексте одно слово: *absurdity* — прим.пер.

⁴ *can be tested* в оригинале, в отличие от *can be judged* — прим.пер.

⁵ *experienced*

Утверждения об абсурдности называются *отрицательными*. Тогда каждое отрицательное утверждение представляет собой реализацию принципа взаимности взаимозависимости. Пусть α — отрицательное утверждение об абсурдности утверждения β . Тогда с одной стороны, вывод истинности утверждения a из истинности утверждения b влечёт вывод абсурдности b из абсурдности a . С другой стороны, истинность β влечёт отрицание абсурдности β . Таким образом, абсурдность отрицания абсурдности β (то есть непротиворечивость α) влечёт абсурдность β (то есть влечёт α).

В следствие такой реализации принципа взаимной взаимозависимости принципы проверяемости и исключённого третьего эквивалентны для отрицательных утверждений. Например, если для α выполняется принцип проверяемости, то либо отрицание β абсурдно, либо непротиворечиво, то есть, по предыдущему параграфу, либо отрицание β абсурдно, либо верна абсурдность β , то есть можно вывести либо отрицание α , либо α . Таким образом, α удовлетворяет принципу исключённого третьего.

Для того, чтобы привести примеры, нарушающие принцип исключённого третьего и его следствия, введём понятие *смещения*. Под смещением мы будем понимать объединение γ элементов сходящейся фундаментальной последовательности $c_1(\gamma), c_2(\gamma), \dots$ вещественных чисел. Числа $c_i(\gamma)$ называются *определяющими числами* смещения, а предел $c(\gamma)$ называется *ядром* смещения. Считается, что любые два определяющих числа отделены⁶ друг от друга и от ядра. Смещения в которых для каждого ν выполнено $c_\nu(\gamma) < c(\gamma)$ называются *левосторонними*. Аналогично, смещения в которых для каждого ν выполнено $c_\nu(\gamma) > c(\gamma)$ называются *правосторонними*. Если фундаментальную последовательность $c_1(\gamma), c_2(\gamma), \dots$ можно представить как объединение левосторонней последовательности $l_1(\gamma), l_2(\gamma), \dots$ и правосторонней $d_1(\gamma), d_2(\gamma), \dots$, то соответствующее смещение называется *двусторонним*.

Пусть α — некоторое математическое утверждение, про которое ещё не установлено, истинно оно или ложно, и проверяемо ли оно вообще. Тогда сопоставим этому утверждению α и смещению γ производящую последовательность $R(\gamma, \alpha)$ вещественных чисел $c_1(\gamma, \alpha), c_2(\gamma, \alpha), \dots$ по следующему правилу: если в момент выбора $c_n(\gamma, \alpha)$ определяющий объект α ещё не определён как истинный или ложный, то $c_n(\gamma, \alpha)$ выбирается равным $c(\gamma)$. Но как только между определением $c_{r-1}(\gamma, \alpha)$ и $c_r(\gamma, \alpha)$ была установлена истинность или ложность α , для каждого натурального ν в качестве $c_r(\gamma, \alpha)$ и $c_{r+\nu}(\gamma, \alpha)$ берётся значение $c_r(\gamma)$. Эта последовательность $R(\gamma, \alpha)$ сходится к некоторому вещественному числу $D(\gamma, \alpha)$, которое называется *прямым результирующим числом γ через α* .

Аналогично, по определяющему объекту α и двустороннему смещению γ построим определяющую последовательность $S(\gamma, \alpha)$ вещественных чисел $\omega_1(\gamma, \alpha), \omega_2(\gamma, \alpha), \dots$ по следующему правилу: если в момент выбора $\omega_n(\gamma, \alpha)$ определяющий объект α ещё не определён как истинный или ложный, то $\omega_n(\gamma, \alpha)$ выбирается равным $c(\gamma)$. Но как только между определением $\omega_{r-1}(\gamma, \alpha)$ и $\omega_r(\gamma, \alpha)$ была установлена истинность α , для каждого натурального ν в качестве $\omega_r(\gamma, \alpha)$ и $\omega_{r+\nu}(\gamma, \alpha)$ берётся значение $d_r(\gamma)$. Если между определением $\omega_{s-1}(\gamma, \alpha)$ и $\omega_s(\gamma, \alpha)$ была установлена ложность α , для каждого натурального ν в качестве $\omega_s(\gamma, \alpha)$ и $\omega_{s+\nu}(\gamma, \alpha)$ берётся значение $l_s(\gamma)$. Эта последовательность $S(\gamma, \alpha)$ сходится к некоторому вещественному числу $E(\gamma, \alpha)$, которое называется *осциллирующим результирующим числом γ через α* .

Пусть γ — правостороннее смещение, определяющие числа которого рациональны. Тогда утверждение « $D(\gamma, \alpha)$ РАЦИОНАЛЬНО» проверяемо, но не физически проверяемо⁷. Кроме того, непротиворечивость этого утверждения эквивалентна его истинности. Далее, $D(\gamma, \alpha) > c(\gamma)$, но не верно, что $D(\gamma, \alpha) > c(\gamma)$.

Пусть γ — двустороннее смещение, правые определяющие числа которого рациональны, а левые — иррациональны. Тогда утверждение « $E(\gamma, \alpha)$ РАЦИОНАЛЬНО» и не проверяемо, и не физически проверяемо. Кроме того, непротиворечивость этого утверждения не эквивалентна его истинности. Более

⁶Пусть вещественные числа a и b определяются сходящимися последовательностями $a_1, a_2, \dots$ и $b_1, b_2, \dots$ рациональных чисел. Тогда число b конструктивно больше (выражение *конструктивно больше* введено переводчиком — прим.пер.) числа a ($b > a$ или $a < b$), если найдутся два подходящих натуральных числа m и n таких, что для любого $\nu \geq m$ выполнено: $b_\nu - a_\nu > 2^{-n}$. Если либо $a > b$, либо $b > a$, то числа *отделены* друг от друга. Если не верно, что $a < b$, то будем писать $a \geq b$. Если не верно, что $a = b$ и что $a < b$, то будем писать $a > b$. Отрицания $a < b$ и $a < b$ оказываются эквивалентными, а отрицание $a \geq b$ эквивалентно $a < b$.

⁷*testable, but not judgable* в оригинале — прим.пер.

того, $E(\gamma, \alpha)$ не $\geq c(\gamma)$, не $\leq c(\gamma)$.

Вера в принцип исключённого третьего в математике рассматривается интуиционизмом как феномен истории цивилизации подобно многовековой вере в рациональность числа π или в то, что Земля является центром вселенной. Интуиционизм объясняет длительное существование этой догмы двумя фактами: во-первых, очевидной непротиворечивостью этого принципа для одного отдельно взятого утверждения; во-вторых, практической применимостью классической логики к обширной группе обычных повседневных событий. Последний факт имел настолько мощное влияние, что классическая логика стала не только сильной привычкой, рассматривалась не только нужной и полезной, но даже априорной.

Очевидно, область применения принципа исключённого третьего совпадает с пересечением областей применения принципа проверяемости и принципа взаимной взаимозависимости. Более того, получившаяся область является *собственной* подобластью в каждом из принципов. Покажем это в следующих примерах:

Пусть A — некоторое множество прямых результирующих чисел смещений с рациональными определяющими числа, B — некоторое множество иррациональных вещественных чисел, а C — объединение A и B . Тогда все утверждения о рациональности некоторого элемента C удовлетворяют принципу проверяемости, тогда как не удовлетворяют принципу исключённого третьего. Аналогично, все утверждения о равенстве двух вещественных чисел удовлетворяют принципу взаимной взаимозависимости, тогда как существуют утверждения о равенстве двух вещественных чисел, не удовлетворяющих принципу исключённого третьего.

Для математических утверждений свойство истинности и ложности являются *универсально аддитивными*, то есть если они выполняются для каждого утверждения α из некоторого множества утверждений, то они выполняются и для всего объединения утверждений α . *Это свойство универсальной аддитивности не выполняется для непротиворечивости*. Тем не менее, непротиворечивость является *конечно аддитивной*. Действительно, пусть утверждения ρ и σ являются непротиворечивыми, а утверждение τ — объединение ρ и σ . Предположим, что верно утверждение ω «УТВЕРЖДЕНИЕ τ ПРОТИВОРЕЧИВО». Тогда истинность ρ влечёт противоречивость σ , что противоречит условиям, значит, истинность ρ абсурдна, то есть само ρ абсурдно. Значит, истинность ω противоречит условиям, и ω противоречиво, то есть τ — непротиворечиво.

Используя эту теорему в случае непротиворечивых утверждений, являющихся переформулировками принципа исключённого третьего для отдельно взятого утверждения, можно получить выполнение принципа для конечного числа утверждений.

Вообще говоря, отрицания двух неэквивалентных⁸ математических утверждений могут быть эквивалентными. Например, отрицания соответствующих из следующих трёх пар неэквивалентных утверждений являются эквивалентными:

I	1. $a = 0$;	I	2. либо $a \leq 0$, либо $a \geq 0$
II	1. $a \geq 0$;	II	2. либо $a = 0$, либо $a \circ > 0$
III	1. $a > 0$;	III	2. $a \circ > 0$

При этом для отрицания некоторых конструктивных утверждений можно переформулировать в конструктивной форме. Например, для натурального числа a отрицание утверждения «НАЙДУТСЯ ДВА НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЛА, ОТЛИЧНЫХ ОТ a И ОТ 1, ТАКИХ ЧТО ИХ ПРОИЗВЕДЕНИЕ РАВНО a » эквивалентно наличию ненулевого остатка при делении числа a на натуральное число, отличное от a и от 1. Аналогично, для двух вещественных чисел соотношение $a \geq b$, определённое как отрицание конструктивного утверждения, может быть переформулирована следующим образом: Пусть вещественные числа a и b определяются сходящимися последовательностями $a_1, a_2, \dots$ и $b_1, b_2, \dots$ рациональных чисел. Тогда $a \geq b$, если для любого натурального числа n найдётся подходящее натуральное число m , что $a_\nu - b_\nu \circ > -2^{-n}$ при $\nu \geq m$.

С другой стороны, появляется некоторая надежда свести утверждение об иррациональности числа a или одно из соотношений $a \neq b$ и $a > b$ для вещественных a и b к подходящему конструктивному

⁸под неэквивалентностью мы понимаем абсурдность эквивалентности, подобно тому как под непротиворечивостью мы понимаем абсурдность противоречивости

свойству, если заметить следующие факты: Прямое результирующее число для смещения, чьё ядро рационально, а определяющие числа иррациональны, является иррациональным, но при этом не отделено от рациональных чисел. Прямое результирующее число произвольного смещения не совпадает с ядром, но, тем не менее, не является отделённым от него. Прямое результирующее число правостороннего смещения лежит справа от ядра, но также не отделено от него.

Для некоторых математических объектов непротиворечивость конструктивных свойств ζ могут быть переформулированы либо в конструктивной форме (возможно, но не обязательно, в случае выполнения принципа взаимной взаимозависимости для ζ), либо в форме отрицания конструктивного свойства. Например, для двух вещественных чисел a и b непротиворечивость утверждения $a = b$ эквивалентна $a = b$, а непротиворечивость утверждения «ЛИБО $a = b$, ЛИБО $a \circ > b$ » эквивалентна $a \geq b$. Аналогично, непротиворечивость $a \circ > b$ эквивалентна абсурдности $a \leq b$, а также абсурдности «ЛИБО $a = b$, ЛИБО $a \circ < b$ ».

С другой стороны, если обратить внимание на свойство непротиворечивости рациональности любого прямого результирующего числа смещений с рациональными определяющими числами, то появляется надежда переформулировать свойство непротиворечивости рациональности вещественного числа в конструктивной форме или в форме отрицания конструктивного свойства.

Под *простым отрицанием* свойства η мы понимаем абсурдность η , а под $(n + 1)$ -кратным отрицанием — абсурдность n -кратного отрицания. Тогда по теореме, описанной выше, получаем, что тройное отрицание эквивалентно простому. Следствием этой теоремы будет факт, что n -кратное отрицание эквивалентно либо простому, либо двукратному, в зависимости от того, чётное число n или нечётное.

Я бы хотел закончить в этом месте. Я надеюсь, что мне удалось убедить читателя, что интуиционизм с одной стороны очищает и возвышает логику, с другой — не считает её чисто истинной. Что интуистская математика является центральной структурой, и исследования основ математики также является центральным, имеющим множество следствий и в нематематических разделах науки.

Комментарии

Об одной из конструкций континуума в интуиционизме

Для определения континуума (отрезка $[0, 1]$) (а также многих других конструкций) в интуиционизме используется конструкция потока. А именно:

Определение. Поток M — это совокупность из закона потока Λ_M и дополнительного закона Γ_M . Закон потока делит кортежи натуральных чисел на допустимые и недопустимые, дополнительный закон сопоставляет допустимым кортежам произвольные математические объекты. Закон потока должен удовлетворять следующим условиям:

1. Пустой кортеж $\langle \rangle$ является допустимым;
2. Для любого допустимого кортежа $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ найдётся по меньшей мере одно натуральное число k , для которого кортеж $\langle a_1, \dots, a_n, k \rangle$ также будет допустимым;
3. Для любого допустимого кортежа $\langle a_1, \dots, a_n, k \rangle$ кортеж $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ также является допустимым.

Свободно становящиеся последовательности натуральных чисел $\{a_k\}$, для которых при любом n кортеж $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ является допустимым по закону потока M , называются *допустимыми свободно становящимися последовательностями*. Отвечающие им последовательности $\{\Gamma(a_k)\}$ называются *элементами* потока M .

Образно поток может быть представлен как дерево, из каждой вершины которого выходит по меньшей мере одна ветвь, и на каждую вершину которого «навешен» тот или иной математический объект. Допустимые свободно становящиеся последовательности натуральных чисел можно представлять в виде бесконечных путей в таком дереве.

Теперь определим отрезок $[0, 1]$ как следующий поток рациональных отрезков:

1. Закон потока: Допустимыми по закону потока считаются кортежи, все элементы которых равны 1 или 2;
2. Дополнительный закон: Пустому кортежу ставится в соответствие отрезок $[0, 1]$. Далее, если кортежу $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ поставлен в соответствие отрезок $[a, b]$, то кортежу $\langle a_1, \dots, a_n, 1 \rangle$ ставится в соответствие отрезок $[a, (a + b)/2]$, а кортежу $\langle a_1, \dots, a_n, 2 \rangle$ — отрезок $[(a + b)/2, b]$.

Элементы этого потока (то есть на самом деле последовательности вложенных отрезков) называются вещественными числами.

Об одинарных и двойных отрицаниях

В статье приведён следующий пример: рассмотрим два утверждения: $a \geq 0$ и $(a = 0 \text{ или } a \circ > 0)$. Они неэквивалентны, в то же время их отрицания эквивалентны. Разберём этот пример подробно.

В интуиционизме эти утверждения действительно неэквивалентны. В статье дано объяснение этого факта, но приведём более простое рассуждение. Напомним определение $a \circ > 0$:

Пусть число a определяются сходящейся последовательностью $a_1, a_2, \dots$ рациональных чисел. Тогда $a \circ > 0$, если найдутся два подходящих натуральных числа m и n таких, что для любого $\nu \geq m$ выполнено: $a_\nu > 2^{-n}$. Если не верно, что $a \circ > 0$, то $a \geq 0$.

Найдём какого-нибудь студента механико-математического факультета и зададим ему вопрос: «ПРАВДА ЛИ, ЧТО 17 ЗНАК ЧИСЛА π РАВЕН 7?». Пока студент будет вычислять 17 знак числа π будем писать последовательность: $1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, \dots$. Студент получит ответ в тот момент, когда мы будем писать некоторое число $1/k$. Обозначим это число через θ . Про число θ можно сказать, что утверждение « $\theta \circ < 0$ » заведомо ложно. Откуда следует, что $\theta \geq 0$. В то же время, мы не можем до того, как будет получен ответ, найти число n , что $\theta > 2^{-n}$. Значит, не верно, что $a \circ > 0$. Утверждения неэквивалентны.

Про число θ мы не можем доказать, что $\theta \circ > 0$. Тем не менее, само по себе утверждение « $\theta \circ > 0$ » не приводит к противоречию, поэтому $a > 0$, но не $a \leq 0$.

Отрицание к утверждению A будем обозначать через $\overline{A}$. Таким образом

$$\overline{a < \circ 0} \neq (a = 0 \wedge a \circ > 0).$$

Докажем, что

$$\overline{\overline{a < \circ 0}} = \overline{(a = 0 \wedge a \circ > 0)} = a < 0.$$

Первое утверждение можно переформулировать так: «УТВЕРЖДЕНИЕ “Если доказать, что $a < \circ 0$, то получится противоречие” АБСУРДНО.» Если $a = 0$ или $a \circ > 0$, то утверждение “Если доказать, что $a < \circ 0$, то получится противоречие” истинно. Тем самым, из $a < \circ 0$ следует то, что $a \neq 0$ и то, что не верно, что $a \circ > 0$. Тем самым из $a < \circ 0$ следует $\overline{(a = 0 \wedge a \circ > 0)}$. Чтобы доказать обратную импликацию, достаточно привести пример a для которого $a \neq 0$, не верно, что $a \circ > 0$ и не верно, что $a < \circ 0$. (тогда не будет противоречия в том, что $a < \circ 0$, тем самым утверждение “Если доказать, что $a < \circ 0$, то получится противоречие” будет абсурдным). Для этого рассмотрим конструкцию, аналогичную примеру выше, только будем писать последовательность $1, -1/2, 1/3, -1/4, 1/5, -1/6, \dots$. Эквивалентность доказана.

Об интуиционизме

Основная идея интуиционизма состоит в том, что объекты, которые мы изучаем, и логические связи, которые мы используем, должны быть для нас интуитивно ясны. Мы можем расширять круг интуитивно ясных утверждений и определений, но не имеем права высказывать какие-либо суждения о интуитивно не ясных для нас объектах.

Идея эта весьма естественна: например, известно что курица умеет считать только до трёх в следующем смысле: если в гнезде было не больше трёх яиц, и одно яйцо исчезло, то она чувствует разницу и начинает волноваться. Если же в гнезде было больше яиц, то исчезновение одного останется незамеченным. Таким образом, для курицы интуитивно ясными являются числа 1, 2 и 3. Она, возможно, и знает, что бывают бóльшие числа. Но не может отличить 5 от 6, сказать, кто из них больше, и вообще, чем они отличаются от ясного ей числа 3. Ворона обычно умеет считать до примерно 10, то есть 5 и 6 для неё — объекты естественные.

Такая же картина верна для человека: некоторые объекты ясны, мы можем отличить их друг от друга. Про другие же — не можем сказать ничего, не можем их отличать друг от друга и даже от понятных объектов.

Но и классическая математика вполне удовлетворяет этому условию: математик не может доказать теорему про объект, про который он ничего не понимает. Отличие состоит в том, что про даже интуитивно не вполне понятные объекты мы можем в некоторых случаях делать какие-то заключения. Интуиционизм такие заключения запрещает. Классическая логика имеет более жёсткие требования к объектам рассуждений и, в то же время, меньшие требования к конструктивности рассуждений, что позволяет получить бóльшую свободу.

В отличие от конструктивизма интуиционизм в настоящее время почти не имеет поддержки.