Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра Высшая алгебра

Трушин Дмитрий Витальевич

Реферат по истории математики

Нестандартный анализ Робинсона

Научный руководитель
профессор, д. ф.-м. н.
Михалев А. В.

Ведущий семенары
к. ф. н.
Катречко С. Л.

Москва

2008

1 Вместо введения

Сегодня нестандартный анализ не представляет из себя ничего удивительного и тем более сногсшибательного. Теория моделей позволяет работать с любыми структурами любого типа. И произвольная модель какого бы то ни было языка смотрится ничуть не удивительней, чем скажем какое-то число на действительной прямой. Методы построения так называемых нестандартных моделей известны любому начинающему изучать основы теории моделей. Единственный любопытный момент, что классики не ошиблись в том, что нужная им структура существует. Однако не надо забывать, что упоминая нестандартный анализ, неспециалисты зачастую ограничивают его существованием гипердействительных чисел, которые смогли оправдать классические доказательства математического анализа. Стоит взглянуть хотя бы на оригинальные работы Робинсона и понять, что уже им нестандартные модели применялись для более широкого класса теорий. Например результат Бернстейна-Робинсона относится к функциональному анализу и оперирует куда более интересными объектами нежели гипердействительные числа, а именно с нестандартной моделью для сепарабельного гильбертова пространства. В книге Девиса [1], к примеру, обсуждается достаточно общая теория для произвольного языка, которая впоследствии применяется к топологическим, метрическим и нормированным пространствам. Потому смотреть на нестандартный анализ сугубо как на способ оправдать классиков в корне не верно. Это скорее всего хороший аппарат, который помог в частности получить доказательства ранее неизвестных результатов. Вот что по этому поводу пишет Девис в предисловии к книге [1]: «Нестандартный анализ является скорее техникой, чем дисциплиной. Все полученные теоремы, кроме тех, которые утверждают, что некоторое нестандартное понятие эквивалентно соответствующему стандартному, могут быть доказаны стандартными методами. Следовательно, наша дисциплина может претендовать на важность лишь постольку, поскольку она приводит к более простому и доступному изложению или (что важнее) к математическим открытиям. Что касается первого, судьей должен быть читатель. Наилучшим основанием для второго служит теория Бернстейна-Робинсона инвариантных подпространств бесконечномерного линейного пространства, ответившая на вопрос, который оставался открытым в течение многих лет.»

Для того чтобы разобраться в том, что такое нестандартный анализ достаточно знать основные определения и приемы из теории моделей. Вкратце вся работа с нестандартными структурами выглядит так. Фиксируется язык у которого есть интересующая нас модель, так сказать стандартная, далее строится какая-то ультрастепень этой модели, это и будет та самая нестандартная модель. Весь фокус заключается в том, что модель и ее ультрастепень элементарно эквивалентны в языке первого порядка, что грубо говоря означает, что все теоремы которые можно доказать про стандартную модель совпадают со множеством теорем которые можно доказать в нестандартной, но в последней у нас куда богаче запас элементов, что и развязывает нам руки.

2 Теория моделей

Теперь перейдем к более детальному изложению вопроса. В вопросах связанных с языком и базовыми определениями будем ориентироваться на книгу Кейслера и Чена «Теория моделей» [4], являющейся своего рода библией этой дисциплины, хотя эти вопросы можно изучать по любой книге по логике; в этом своего рода вся соль нестандартного анализа, использующего сугубо «стандартные» факты из логики. В основе изложения материала будет лежать книга Робинсона «Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры» [2]. Добавления о топологических и метрических пространствах взяты из книги Девиса «Прикладной нестандартный анализ» [1]. Исследование истории развития нестандартного анализа основано на замечаниях самого Робинсона помещенных в его книге [2] и книге Успенского «Что такое неастандартный анализ?» [3].

2.1 Языки

Чтобы определить язык $\mathcal{L}$, прежде всего нужно запастись символами (буквами) для выражения нашей теории. Будем называть алфавитом произвольное множество $\mathcal{A}$. Дополнительно считаем, что наш алфавит представлен в виде дизъюнктного объединения подмножеств следующим образом:

$$\mathcal{A} = X \sqcup C \sqcup F \sqcup P \sqcup L \sqcup S$$

где X – множество переменных, C – множество константных символов, F – множество функциональных символов, P – множество предикатных символов $L = \{\rceil, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, =\}$ – множество логических связок, S – множество служебных символов, к которым относятся скобки и запятая. В данный момент названия этих множеств надо понимать просто удобным их обозначениями и не более того. Еще надо добавить, что каждому функциональному символу f сопоставлена его арность m_f – натуральное число и каждому предикатному символу r его арность m_r. Часто подмножество $\sigma = C \sqcup F \sqcup P$ называют сигнатурой или типом подобия.

Теперь определим все необходимые синтаксические структуры. Мы можем рассматривать все возможные конечные последовательности символов нашего алфавита $\mathcal{A}^*$, множество различных выражений которые можно написать, используя символы алфавита. Однако из них надо выделить осмысленные выражения такие как термы и формулы, то есть множества термов T и формул Φ есть подмножества в множестве $\mathcal{A}^*$.

Определим множество термов T следующим образом

- переменные и константы являются термами, то есть $X \sqcup C \subseteq T$
- если f функциональный символ арности m, а $t_1, \ldots, t_m$ – термы, то $f(t_1, \ldots, t_m)$ – терм

Введем множество формул Φ так

- выражения $t_1 = t_2$ и $r(t_1, \ldots, t_m)$, где $t_1, \ldots, t_m$ термы, а r – символ m-арного отношения, есть формулы

- если f и g формулы, то $\rceil f$, $(\exists x)f$, $(\forall x)f$, $f \wedge g$, $f \vee g$, $f \Rightarrow g$, $f \Leftrightarrow g$ – формулы

Не вдаваясь в подробности, можно определить что значит, что переменная x является свободной в формуле f, грубо говоря это значит, что она не содержится ни под каким квантором в данной формуле. Формулы без свободных переменных называются предложениями. Множество всех предложений языка $\mathcal{L}$ обозначим через $Pr(\mathcal{L})$ или кратко Pr.

Разделавшись с синтаксисом, можно перейти к определению семантики. Моделью языка $\mathcal{L}$ называется следующая пара $\langle M, I \rangle$, где M – некоторое множество, называемое носителем, а I соответствие определенное на σ, такое что

- для любой константы c, ее образ $I(c)$ есть элемент M

- для любого функционального символа f арности m, его образ $I(f)$ есть функция $I(f)\colon M^m \to M$

- для любого предикатного символа r арности m, его образ $I(r)$ есть подмножество $I(r) \subseteq M^m$

Интерпретация заданная на сигнатуре σ может быть продолжена до интерпретации термов и интерпретации формул на последовательности элементов из носителя. Пусть $\overline{a} = (a_x)_{x \in X}$ бесконечное множество элементов из носителя мощности $|X|$, определим интерпретацию термов на последовательности $\overline{a}$ так

- если терм $t = c$, то $t(\overline{a}) = I(c)$

- если терм $t = x$, то $t(\overline{a}) = a_x$

- если терм $t(\overline{x}) = f(t_1(\overline{x}), \ldots, t_m(\overline{x}))$, то $t(\overline{a}) = I(f)(t_1(\overline{a}), \ldots, t_m(\overline{a}))$

Осталось определить истинность формулы в модели на последовательности $\overline{a}$ следующим образом

- $M \vdash t_1(\overline{a}) = t_2(\overline{a})$, если $t_1(\overline{a})$ равно $t_2(\overline{a})$

- $M \vdash r(t_1(\overline{a}), \ldots, t_m(\overline{a}))$, если $(t_1(\overline{a}), \ldots, t_m(\overline{a})) \in I(r)$

- $M \vdash (\rceil f)(\overline{a})$, если не верно что истина $f(\overline{a})$

- $M \vdash (f \wedge g)(\overline{a})$, если верно и $f(\overline{a})$ и $g(\overline{a})$ одновременно

- $M \vdash (f \vee g)(\overline{a})$, если верно хотя бы одно из $f(\overline{a})$ и $g(\overline{a})$

- $M \vdash (f \Rightarrow g)(\overline{a})$, если либо $f(\overline{a})$ ложно, либо $f(\overline{a})$ и $g(\overline{a})$ оба истины

- $M \vdash (f \Leftrightarrow g)(\overline{a})$, если $f(\overline{a})$ и $g(\overline{a})$ ложны или истинны одновременно

- $M \vdash ((\exists x)f)(\overline{a})$, если существует такой элемент y из M, что верно $f(\overline{a}^*)$, где $\overline{a}^*$ совпадает с $\overline{a}$ во всех членах кроме x, а $\overline{a}^*_x = y$.
- $M \vdash ((\forall x)f)(\overline{a})$, если для любого элемента y из M, верно что $f(\overline{a}^*)$, где $\overline{a}^*$ совпадает с $\overline{a}$ во всех членах кроме x, а $\overline{a}^*_x = y$.

Множество предложений истинных в данной модели M обозначим через $Th(M)$. Осталось только определить понятие морфизма моделей. Если $(\,M, I\,)$ и $(\,M', I'\,)$ модели языка $\mathcal{L}$, то отображение $\varphi\colon M \to M'$ называется морфизмом моделей, если

- $\varphi(I(c)) = I'(c)$, для любого $c \in C$
- $\varphi(I(f)(a_1, \ldots, a_m)) = I'(f)(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_m))$
- $(a_1, \ldots, a_m) \in I(r)$ тогда $(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_m) \in I'(r)$

Две модели M и M' одного языка $\mathcal{L}$ являются элементарно эквивалентными, если $Th(M) = Th(M')$.

Теперь можно немного обсудить неформальный смысл данных выше определений. Начнем по порядку, в синтаксической части самым важным является множество предложения данного языка, это множество всех тех утверждений которые можно сказать в нашем языке. Роль символов из сигнатуры становится очевидна при определении интерпретации. Константы в модели интерпретируются как элементы сохраняемые всеми морфизмами моделей, функцианальные символы соответствуют функциям, также переходящим друг в друга при морфизмах, то же самое верно и по отношению к предикатным символам, они отвечают подмножествам в степенях носителя модели с тем же условием сохранения при морфизмах. Множество $Th(M)$ для модели M есть ничто иное как множество верных в ней теорем, а элементарная эквивалентность моделей означает, что множество теорем, которых можно в них доказать совпадают. Значение терма на последовательности есть ни что иное как подстановка значения переменных в выражение, соответствующее терму. Значение формулы на последовательности – это проверка высказывания с параметрами на неком множестве элементов. Очень полезным будет обзавестись некоторым способом построения моделей элементарно эквивалентных данной.

2.2 Ультрастепени

Приводимая в данном разделе конструкция является «основной ударной силой» всей теории моделей. Вначале определим понятие фильтра на множестве. Пусть X некоторое множество, тогда семейство его подмножеств $\mathcal{F}$, то есть $\mathcal{F} \subseteq 2^X$, называется фильтром, если

- $X \in \mathcal{F}$, $\emptyset \notin \mathcal{F}$
- если A и B из $\mathcal{F}$, то $A \cap B$ из $\mathcal{F}$

- если $A \in \mathcal{F}$, $A \subseteq B$, то $B \in \mathcal{F}$

Так как фильтрыы есть подмножества в 2^X, то на них возникает естественный порядок включения, максимальные относительно этого порядка фильтры, то есть те больше которых не бывает, называются максимальными фильтрами. Приведем два важных примера фильтров.

1. Пусть Y подмножество X, тогда семейство $\mathcal{F} = \{ A \subseteq X \mid Y \subseteq A \}$ является фильтром. В частности при $Y = \{ x \}$, где $x \in X$ получаем пример максимального фильтра.

2. Фильтр Фреше. Пусть X бесконечное множество, тогда семейство $\mathcal{F} = \{ Y \subseteq X \mid |X \setminus Y| < \infty \}$ является фильтром.

Верен следующий факт, что любой фильтр вкладывается в максимальный фильтр. Этот факт благодарен своему существованию все той же знаменитой аксиоме выбора, без нее это утверждение не доказуемо. Все максимальные ультрафильтры делятся на два сорта, первый, это фильтры из примера 1, и второй, это максимальные фильтры содержащие фильтр Фреше. Последние и называются ультрафильтрами.

Пусть у нас задан некий язык $\mathcal{L}$. Рассмотрим семейство его моделей $\{ S_x \}_{x \in X}$, заиндексированное некоторым бесконечным множеством X. Пусть $\mathcal{F}$ – ультрафильтр на множестве X. Наша цель определить модель, обозначаемую $\prod\limits_{x \in X} S_x/\mathcal{F}$ и называемую ультрапроизведением.

Для того чтобы определить модель, надо задать ее носитель и интерпретацию сигнатуры в ней. Прежде всего определим носитель модели; рассмотрим следующее отношение над множеством произведения $\prod S_x$: говорим, что X-последовательность $a = (\ldots, a_x, \ldots)$ и X-последовательность $b = (\ldots, b_x, \ldots)$ равны по модулю $\mathcal{F}$, если $\{ x \in X \mid a_x = b_x \}$ принадлежит $\mathcal{F}$. Это отношение, очевидно, является отношением эквивалентности, и мы в качестве носителя возьмем фактормножество $\prod S_x/\mathcal{F}$, то есть множество его классов.

Теперь определим интерпретацию символов сигнатуры следующим образом

- если - константный символ, то обозначим через $_x$ его интерпретацию в S_x; по определению, $I(c)$ есть класс X-последовательности $(\ldots, _x, \ldots)$.

- если f – символ n-местной функции, то обозначим через f_x его интерпретацию в S_x; для данных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ из $\prod S_x/\mathcal{F}$ мы определим $I(f)(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$; выберем представителей $a_1, \ldots, a_n$ в классах $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, пусть $a_i = (\ldots, a_{ix}, \ldots)$; и определим в качестве значения $I(f)(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ класс по модулю $\mathcal{F}$ X-последовательности $(\ldots, f_x(a_{1x}, \ldots, a_{nx}), \ldots)$.

- если r - символ n-арного отношения, мы обозначим через r_x его интерпретацию в S_x и мы определим его интерпретацию в $\prod S_x/\mathcal{F}$ следующим образом: если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ из $\prod S_x/\mathcal{F}$, мы выберем представителей с каждого α_i и скажем, что $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ удовлетворяет $I(r)$, если множество таких x, что $(a_{1x}, \ldots, a_{nx})$ удовлетворяет r_x принадлежит $\mathcal{F}$.

Смысл этого определения становится ясным если считать множества, лежащие в ультрафильтре большими, а не лежащие маленькими. То равенство элементов можно понимать как две X-последовательности равны тогда и только тогда, когда они совпадают почти всюду. Аналогичны и идеи интерпретации функциональных и предикатных символов, через выполнение некого условия почти всюду.

«Следующая теорема – смысл существования ультрапроизведений!» (Данная фраза была взята из книги Бруно Пуаза «Курс теории моделей» [5]).

Теорема (Лось)**.** *Пусть $\mathcal{F}$ – ультрафильтр над I, модели S_i языка $\mathcal{L}$ индексированы элементами I; Пусть $f(\overline{x})$ – формула языка $\mathcal{L}$, $\overline{\alpha} = (\alpha_x)$ – кортеж элементов из $\prod S_i/\mathcal{F}$, a_x – представители из $\prod S_i$ для классов α_x; тогда $f(\overline{\alpha})$ истина в $\prod S_i/\mathcal{F} \iff \{\, i \in I \mid S_i \vdash f(a_{xi}) \,\}$ принадлежит $\mathcal{F}$.*

Теперь предположим, что все модели S_i одинаковы и совпадают с S, тогда ультрапроизведение называется ультрастепенью и обозначается $\prod S/\mathcal{F}$ или $S^{\mathcal{F}}$. В этом случае «диагональное» вложение $\Delta\colon S \to S^{\mathcal{F}}$, по правилу $\Delta x = (\ldots, x, \ldots)$, задает морфизм модели в ее ультра степень. Таким образом можно отождествить модель с подмоделью в ее ультрастепени. Простым следствием теоремы Лося является элементарная эквивалентность модели и ее ультрастепени, а именно равенство $Th(S) = Th(\prod S/\mathcal{F})$. Этот факт часто любят называть принципом переноса для нестандартных моделей.

3 Нестандартный анализ

Для развития нестандартного анализа, для начала, нужно построить соответствующий язык для «стандартной» структуры. После рассмотреть эту структуру как модель данного языка и взять ее ультрастепень в качестве нестандартной модели. Элементарная эквивалентность модели и ультрастепени в языке обеспечит нам то обстоятельство, что мы ни потеряем никаких теорем, ни приобретем лишних. Такой язык должен быть по возможности максимально выразительным, потому в сигнатуру желательно поместить все элементы структуры, все предикаты и функции. (Стоит отметить, что Робинсон не использует функциональных символов, но, как известно, их исключение из языка не обедняет его, так как на функции можно смотреть как на предикаты специального вида.)

3.1 Гипердействительные числа

3.1.1 Постороение

Пусть $\mathbb{R}$ – поле действительных чисел. Определим сигнатуру языка $\mathcal{L}$ следующим образом: $\sigma = C \sqcup F \sqcup P$, где

- $C = \mathbb{R}$

- $F = \bigcup\limits_{n \geq 1} \{ f \mid f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \}$ – множество всех вещественных функций
- $P = \bigcup\limits_{n \geq 1} \{ A \mid A \subseteq \mathbb{R}^n \}$ – множество всех вещественных предикатов

Теперь нужно убедиться, что существуют собственные расширения $\mathbb{R}$ ей элементарно эквивалентные. Действительно, положим в качестве такой модели счетную ультрастепень $\mathbb{R}$, а именно $\mathbb{R}^* = \prod\limits_{\mathbb{N}} \mathbb{R}/\mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ – произвольный ультрафильтр на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$. Элементарная эквивалентность $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^*$ следует из общих соображений про ультрапроизведения. Остается привести пример элемента, на котором они отличаются. В качестве такого элемента возьмем класс последовательности $f(n) = n$, но равенство с любой постоянной последовательностью выполняется либо на одноэлементном, либо на пустом множестве, ни то ни другое не лежит в ультрафильтре по определению. Следовательно нами построено собственное расширение $\mathbb{R}$, а значит нестандартные модели существуют.

Увидеть неархимедовость счетной модели нимчего не стоит, просто проверив по определению, что класс последовательности $f(n) = \frac{1}{n}$, является ненулевым элементом, меньше любого рационального числа, а таких в архимедовом поле быть не может. Неархимедовость произвольной нестандартной модели следует из известного факта, о том, что любое целостное архимедово кольцо вкладывается в $\mathbb{R}$ как линейноупорядоченное подкольцо, а так как любое вложение $\mathbb{R}$ в себя изоморфизм, то существование такого вложения для нестандартной модели влекло бы противное.

Теперь пусть $\mathbb{R}^*$ – любая нестандартная модель анализа. Определим множества M_0 и M_1 следующим образом:

$$M_0 = \{ a \in \mathbb{R}^* \mid \exists r \in \mathbb{R},\, |a| < r \}$$
$$M_1 = \{ a \in \mathbb{R}^* \mid \forall r \in \mathbb{R},\, |a| < r \}$$

где модуль определяется обычным образом, если для $a \in \mathbb{R}^*$ верно, что $a \geq 0$, то $|a| = a$, иначе $|a| = -a$. Элементы множества M_0 называются конечными, элементы M_1 – бесконечно малыми. Элементы $\mathbb{R}$ будем называть стандартными, они образуют подмножество в M_0. Кроме того $\mathbb{R}^* \setminus M_0$ будем называть бесконечными, а элементы $\mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}$ – нестандартными.

Ясно, что M_0 – кольцо, а M_0 – его максимальный идеал. Нетрудно проверить, что факторкольцо M_0/M_1 изоморфно $\mathbb{R}$, точнее мы имеем естественное вложение $\mathbb{R}$ в M_0, а следовательно и вложение $\mathbb{R}$ в факторкольцо M_0/M_1, утверждается, что последнее вложение эпиморфно, а следовательно является изоморфизмом. Обозначим проекцию $M_0 \to M_0/M_1 = \mathbb{R}$ через st – отображение взятия стандартной части числа.

Рассмотрим одноместное отношение $N(x)$, задающее множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ в $\mathbb{R}$, тогда оно же задает подмножество $\mathbb{N}^*$ в $\mathbb{R}^*$, которое является нестандартной моделью арифметики. Элементы $\mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ будем называть бесконечно большими натуральными числами, конечно же они являются бесконечно большими в смысле терминологии выше.

В целях демонстрации того, как работает нестандартный анализ, пройдемся по базовым понятиям анализа, следуя Робинсону.

3.1.2 Последовательности

Покажем как выглядит с точки зрения нестандартного анализа теория бесконечных последовательностей. А именно, $\{s_n\}$ есть функция от n, определенная вначале для всех стандартных натуральных чисел $\mathbb{N}$ и принимающая значения в $\mathbb{R}$. Переход к $\mathbb{R}^*$ автоматически расширяет определения $\{s_n\}$ для всех $n \in \mathbb{N}^*$, т. е. также и для всех нестандартных натуральных чисел, в силу того, что на последовательности можно посмотреть как на предикаты, а их значения определены в любой модели. То есть к обычной последовательности добавляется еще большой «хвост», которого нет в стандартном анализе, и его наличие сильно упрощает доказательства. Обычно в «стандартном мире» борьба ведется сначала за существование объекта, а уж потом за его свойства, в нестандартном анализе первая проблема в большинстве случаев отпадает за счет таких вот «хвостов». На самом деле, для последовательности ее значение в бесконечно большом натуральном числе соответствует предельной точке в обычном понимании, точнее верно, что множество $\{st(s_\omega)\}$, где ω – бесконечно большое натуральное число, является в точности множеством предельных точек последовательности.

Продемонстрируем как меняются стандартные определения и приведем пример нестандартного доказательства.

Лемма. *Стандартная последовательность $\{s_n\}$ ограничена тогда и только тогда, когда число s_ω конечно для любого бесконечного натурального числа ω.*

Доказательство. Если $\{s_n\}$ ограничена, то существует положительное стандартное число μ такое, что верно

$$\forall x(N(x) \Rightarrow (|s_x| \leqslant \mu))$$

Следовательно это утверждение истинно и в $\mathbb{R}^*$. Отсюда получаем, что $|s_\omega| \leqslant \mu$ для всех бесконечных целых положительных ω. Обратно, если s_ω конечно для всех бесконечных натуральных чисел ω, то s_ω конечно для всех натуральных чисел ω. В соответствии с этим, если μ – бесконечно большое положительное число в $\mathbb{R}^*$, то $\forall x(N(x) \Rightarrow (|s_x| \leqslant \mu))$ истинно в $\mathbb{R}^*$. Однако, это утверждение не формулируется в терминах нашего языка $\mathcal{L}$, так как содержит невходящюю в него константу μ. Тем не менее, это утверждение влечет истинность следующего

$$\exists y \forall x(N(x) \Rightarrow (|s_x| \leqslant y))$$

Которое уже выражается в терминах нашего языка, а значит истинно в $\mathbb{R}$. То есть существует такое действительное число μ_0, что в $\mathbb{R}$ истинно $\forall x(N(x) \Rightarrow (|s_x| \leqslant \mu_0))$, а это и означает ограниченность. □

Это доказательство носит роль определения нестандартного аналога для понятия ограниченности последовательности. Более или менее аналогично производится доказательство эквивалентности нестандартных определений стандартным. Следующие теоремы, доказанные Робинсоном, можно считать аналогами известных определений.

Теорема. *Стандартное число s является пределом стандартной последовательности $\{s_n\}$, пишем $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, тогда и только тогда, когда $s - s_\omega$ бесконечно мало для всех бесконечных положительных целых ω.*

Теорема. *Стандартное число s является предельной точкой стандартной последовательности $\{s_n\}$ в том и только в том случае, когда s_ω бесконечно близко к s для некоторого бесконечного натурального числа ω.*

Как уже отмечалось выше, подмножество M_1 является идеалом в M_0 и более обще подгруппой в $\mathbb{R}^*$. Следовательно разбиение $\mathbb{R}^*$ на смежные классы по подгруппе M_1 задает отношение эквивалентности, которое состоит в том, чтобы отличаться на бесконечно малую. Точнее, для любых a и b из $\mathbb{R}^*$ запись $a \simeq b$ будет означать, что $a - b$ бесконечно мало. Согласно этой терминологии можно переписать два предыдущих утверждения в следующем виде.

Теорема. *Стандартное число s является пределом стандартной последовательности $\{s_n\}$ тогда и только тогда, когда $s \simeq s_\omega$ для всех бесконечных положительных целых ω.*

Теорема. *Стандартное число s является предельной точкой стандартной последовательности $\{s_n\}$ в том и только в том случае, когда $s \simeq s_\omega$ для некоторого бесконечного натурального числа ω.*

Стоит отметить, что стандартные теоремы о том, что предел суммы двух стандартных последовательностей равен сумме пределов этих последовательностей, немедленно следует из того факта, что M_1 – аддитивная группа. А свойство предела для перемноженных последовательностей, то есть предел произведения равен произведению пределов, следует из соображения, что имеющие предел последовательности органичены, то есть лежат в M_0, и M_1 является идеалом в M_0.

Следующая теорема соответствует признаку сходимости Коши.

Теорема. *Стандартная последовательность сходится (имеет предел) тогда и только тогда, когда $s_\lambda \simeq s_\mu$ для всех бесконечных целых положительных чисел λ и μ.*

Эту теорему можно доказывать тем же способом, что и самое первое утверждение об ограниченности последовательности, основываясь на признаке Коши, утверждающем, что стандартная последовательность $\{s_n\}$ сходится в том и только в том случае, когда

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} (s_n - s_m) = 0$$

Однако, можно применить другую и в некотором смысле более интересную процедуру. Другими словами, можно попытаться использовать $\mathbb{R}^*$ для того, чтобы исключить, насколько это возможно, традиционную ε-технику. Конечно, эта мысль – только основной путеводный принцип, так как все традиционные методы по-прежнему применимы, по крайней мере ко всем стандартным понятиям.

Доказательство. Будем доказывать теорему, используя в качестве определения предела условие $s_\omega \simeq s$ для всебесконечных ω. Отсюда немедленно следует необходимость. В самом деле, пусть λ и μ – два бесконечных целых положительных числа. Тогда, по предположению, $s_\lambda \simeq s$ и $s_\mu \simeq s$ и, следовательно, $s_\lambda \simeq s_\mu$, так как $\simeq$ – отношение эквивалентности.

Допустим теперь, что условие критерия выполнено для последовательности $\{s_n\}$. Прежде всего, утверждается, что s_λ конечно для некоторого бесконечного натурального числа λ. В самом деле, если это не так, то последовательность $\{s_n\}$ согласно первой лемме неограничена. В соответствии с этим в $\mathbb{R}$ (а следовательно, и в $\mathbb{R}^*$) для любого положительного ν существуют α и β, большие ν, такие, что $|s_\alpha - s_\beta| > 1$. Беря ν бесконечным, мы получим, что s_α не бесконечно близко к s_β для бесконечных α и β, а это противоречит условию теоремы. Отсюда вытекает, что s_λ конечно для некоторого бесконечного натурального числа λ, т. е.$s_\lambda \in M_0$. Пусть $s = st(s_\lambda)$. Мы утверждаем, что s есть предел $\{s_n\}$. В самом деле, $s \simeq s_\lambda$, так как $s = st(s_\lambda)$, и, по условию, $s_\lambda \simeq s_\mu$ для всех остальных бесконечных натуральных чисел μ. Следовательно, $s \simeq s_\mu$ для всех бесконечных натуральных чисел и потому s есть предел $\{s_n\}$. □

Стоит отметить еще одну интересную идею, демонстрируемую Робинсоном в доказательстве теоремы Больцано-Вейерштрасса. Не будем приводить полного доказательства, отметим лишь главное. Основная идея состоит в том, чтобы разбить отрезок на конечное число частей, для любого натурального числа, перейдя в гипердействительные числа, получим «разбиение» отрезка на любое гипернатуральное число частей. Для конечного числа отрезков, в каком-то из них обязательно лежит сколь угодно большой член последовательности, по принципу переноса в бесконечном разбиении отрезка, в каком-то подотрезочке лежит сколь угодно большой член последовательности, а в соответствии с аксиомой Дедекинда каждый из них есть бесконечно малый «кусочек» возле каждой точки отрезка. Единственное надо аккуратно уточнить как именно понимать бесконечное разбиение и что является его членами.

3.1.3 Функции

В построенной Робинсоном теории функций действительного переменного в рамках нестандартной модели с самых первых строк проглядывается путь к обобщению этой конструкции на случай топологического языка, или, если быть совсем аккуратным, видны топологические эффекты.

Будем рассматривать стандартные функции, определенные в стандартном интервале, замкнутом или открытом. Как и в случае последовательностей требуется получить гипердействиетельные аналоги известных определений, оперируя с ε-техникой и уже пользуясь новыми определениями пытаться доказать знакомые нам теоремы. Следующая теорема является нестандартным определением предела функции в точке слева.

Теорема. *Пусть стандартная функция f определена в стандартном интервале $b < x < a$. Тогда стандартное число l является пределом f при x, стремящемся к a слева (т. е. $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = l$), тогда и только тогда, когда $f(a - \eta) \simeq l$ для всех бесконечно малых положительных η.*

Конечно, соответствующий результат верен и для предела справа. Из данной теоремы непосредственно вытекают следующие аналоги определения непрерывности.

Теорема. *Стандартная функция f непрерывна в стандартной точке x_0, принадлежащей внутренности интервала I, тогда и только тогда, когда $f(x_0 + \eta) \simeq f(x_0)$ для всех бесконечно малых η.*

Теорема. *Стандартная функция f непрерывна в стандартном интервале I тогда и только тогда, когда $f(x_0 + \eta) \simeq f(x_0)$ для всех стандартных $x_0 \in I$ и всех бесконечно малых η, таких, что $x_0 + \eta$ принадлежит I.*

Понятие стандартного открытого интервала обладает следующей очень простой нестандартной характеристикой. Описание открытости через бесконечно малые окрестности точки. Следующую теорему можно рассматривать как определение открытого интервала.

Теорема. *Стандартный интервал I является открытым тогда и только тогда, когда $x+y$ принадлежит I для любого стандартного $x \in I$ и любого бесконечно малого y.*

В качестве определения замкнутого интервала можно воспользоваться тем, что его дополнение открыто, однако, есть куда более прямой способ описания.

Теорема. *Стандартный интервал I является замкнутым тогда и только тогда, когда для любого $x \in I$ его стандартная часть $st(x)$ также принадлежит интервалу I.*

Важным понятием анализа является понятие равномерной непрерывности. Прежде чем вводить соответствующее нестандартное понятие, отметим, что непрерывность функции характеризуется бесконечно малой близостью ее значений в бесконечно малых окрестностях стандартных точек. Однако у стандартного интервала есть нестандартные точки и часть из них могут не попасть ни в одну из таких бесконечно малых окрестностей, примером могут являться точки вида $b+\eta$, где η положительное бесконечно малое, а в качестве интервала выступает множество $I = \{\, x \in \mathbb{R}^* \mid b < x < a \,\}$. Равномерная непрерывность в нестандартном случае как раз и вызвана тем, что мы «заботимся» о всех точках нестандартного интервала.

Теорема. *Стандартная функция f равномерно непрерывна в стандартном интервале I тогда и только тогда, когда $f(x_0 + \eta) \simeq f(x_0)$ для всех $x_0 \in I$ и всех бесконечно малых η, таких, что $x_0 + \eta \in I$.*

Пользуясь нестандартными определениями фигурирующих в следующей теореме понятий, можно получить очень лаконичное нестандартное доказательство, которое будет продемонстрировано.

Теорема. *Стандартная функция f, непрерывная в замкнутом ограниченном стандартном интервале I, равномерно непрерывна в этом интервале.*

Доказательство. Допустим, что f непрерывна в I, но не равномерно непрерывна. Тогда найдется такое $a \in I$ и такое бесконечно малое η, что $a+\eta \in I$ и $f(a+\eta) - f(a)$ не является бесконечно малым. Так как по условию интервал I замкнут и ограничен, то число a конечно и имеет стандартную часть a_0, принадлежащую этому же интервалу. В силу обычной непрерывности $f(a) \simeq f(a_0)$ и $f(a+\eta) \simeq f(a_0)$, а потому $f(a+\eta) \simeq f(a)$. Следовательно, вопреки предположению, $f(a+\eta) - f(a)$ бесконечно мало. □

В контексте нестандартных определений доказательство последнего факта превратилось в очевидную проверку определений. Если сравнить его с доказательствами, приводимыми в классических учебниках, то увидим насколько оно короче и прозрачнее.

Идея деления отрезка до бесконечности всплывает у Робинсона в связи с доказательством свойств непрерывной функции на отрезке, таких как наличие нуля при разных знаках на концах или наличие максимума и минимума. Ограничимся лишь таким кратким упоминанием о них и умолчим подробные формулировки и доказательства.

Нельзя обойти такой раздел теории функций как ряды.

Пусть теперь $\{f_n\}$ – последовательность вещественных функций, определенных в интервале $I \subseteq \mathbb{R}$. В соответствии с нашим определением стандартных понятий $\{f_n(x)\}$ может рассматриваться как стандартная функция от двух переменных x и n, определенная для всех x из стандартного интервала I и для всех (стандартных или нестандартных) натуральных чисел n. Мы будем говорить в этом случае, что $\{f_n(x)\}$ есть стандартная последовательность функций. По теореме о пределе последовательности последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится (в обычном смысле) к стандартной функции $f(x)$ в I если для любого стандартного $x_0 \in I$ будет $f_\omega(x_0) \simeq f(x_0)$ для всех бесконечных натуральных чисел ω. Свойства равномерной сходимости вынесем в отдельное утверждение.

Теорема. *Для того чтобы стандартная последовательность функций $\{f_n(x)\}$ равномерно сходилась к стандартной функции $f(x)$ в стандартном интервале I, необходимо и достаточно, чтобы $f_\omega(x_0) \simeq f(x_0)$ для всех $x_0 \in I$ и для всех бесконечных натуральных чисел ω.*

Как мы видим в случае сходимости рядов натуральные бесконечно большие члены отвечают за пределы, сходимость, а за равномерность отвечает «забота» о всех точках интервала. При этом пропадает необходимость работы сразу со всеми точками или множеством точек одновременно, которая то и дело подстерегает нас в «стандартном» анализе. Комбинируя стандартные и нестандартные рассуждения, технику работы с пределами функций в точке и последовательностями, можно получать более или менее короткие доказательства результатов о функциональных рядах. Например о том, что равномерный предел непрерывных функций непрерывен и прочее.

Теперь перейдем к нестандартному определению производной функции в точке. Пусть f – стандартная функция, определенная в стандартном интервале I, и пусть x_0 – стандартная внутренняя точка этого интервала. Непосредственным следствием нестандартного определения предела является следующая теорема.

Теорема. *Стандартное число a является производной функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ тогда и только тогда, когда для всех бесконечно малых $\eta \neq 0$ имеет место*

$$\frac{f(x_0+\eta)-f(x_0)}{\eta} \simeq a$$

Такое определение предела удобно в первую очередь тем, что дает возможность работать с производной как с геометрическим объектом, что сильно уменьшает борьбу со взятием предела в классическом понимании. Вот что пишет по поводу следующей теоремы сам Робиносн: «Уже одного приведенного примера достаточно, чтобы убедиться в том, что нестандартное дифференциальное исчисление может конкурировать в простоте с самым ортодоксальным подходом.»

Теорема (Ролля)**.** *Пусть дана стандартная функция $f(x)$, определенная и дифференцируемая в стандартном замкнутом интервале $a \leqslant x \leqslant b$. Предположим, что $f(a) = f(b) = 0$. Тогда существует внутренняя точка c этого интервала, такая, что $f'(c) = 0$.*

Доказательство. Если $f(x) = 0$ тождественно на всем интервале, то для любой стандартной внутренней точки c и для любого бесконечно малого $\eta \neq 0$ будет

$$\frac{f(c+\eta)-f(c)}{\eta} = 0$$

и потому $f'(c) = 0$ согласно нестандартному определению. Допустим теперь, что $f(x \neq 0)$ в некоторой точке интервала – без ограничения общности мы можем предположить, что $f(x) > 0$. В силу непрерывности $f(x)$ достигает максимума в некоторой внутренней точке c интервала. Пусть η бесконечно мало; тогда

$$f(c+\eta) \leqslant f(c) \text{ и } f(c-\eta) \leqslant f(c)$$

Пусть $f'(c) = a$; отсюда на основании нестандартного определения

$$0 \geqslant \frac{f(c+\eta)-f(c)}{\eta} \simeq a$$

и

$$0 \leqslant \frac{f(c-\eta) - f(c)}{\eta} \simeq a$$

Но коль скоро стандартное число a бесконечно близко как к положительным, так и к отрицательным числам, оно обязательно равно нулю. □

3.1.4 Интегрирование

Займемся теперь определенным интегрированием в общем случае. Основная трудность заключается в построении аппарата, который бы позволил работать с разбиениями отрезка как можно более общего вида. Робинсон вместо построения теории нестандартных разбиений ограничивается трюком с равномощностью множества разбиений и вещественной прямой, сводя задачу к уже построенным конструкциям.

Пусть I – фиксированный стандартный замкнутый интервал $[a, b]$. Пусть p – любая последовательность из $k+1$ стандартных вещественных чисел

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_k = b$$

где k может быть любым целым положительным числом. Последовательность p мы будем называть разбиением интервала I и множество всех разбиений обозначим через P_{ab}. Нетрудно проверить, что множество P_{ab} имеет мощность континуума: $|P_{ab}| = 2^{\mathbb{N}}$. Выберем и зафиксируем какое-нибудь взаимно однозначное соответствие между P_{ab} и $\mathbb{R}$; через r_p будем обозначать действительное число, соответствующее разбиению $p \in P_{ab}$ при этом соответствии: $p \leftrightarrow r_p$. Тогда следующие отношения принадлежат языку $\mathbb{L}$:

- $F(x, y)$ – бинарное отношение, истинное тогда и только тогда, когда x – вещественное число, а y – длина разбиения, соответствующего x (т. е. y – целое положительное число k)
- $G(x, y)$ – отношение, истинное тогда и только тогда, когда x – вещественное число, а y – максимум длин интервалов (a_i, a_{i+1}), которые фигурируют в соответствующем разбиении (таким образом, y – положительное вещественное число)
- $N(x, y, z)$ – тернарное отношение, истинное тогда и только тогда, когда x – вещественное число, y – натуральное число, а z есть y-й элемент разбиения, соответствующего x (начиная с нулевого элемента), т. е. $z = a_y$.

Отношения $F(x, y)$ и $G(x, y)$ задают функции $y = \varphi(x)$ и $y = \gamma(x)$, определенные для всех действительных чисел. Аналогично, $N(x, y, z)$ определяет функцию $z = \nu(x, y)$, определенную для всех действительных чисел x и всех натуральных чисел y, таких, что $y \leqslant \varphi(x)$.

Пусть $y = f(x)$ – фиксированная стандартная функция, определенная и ограниченная на I. Для любых двух чисел x_1 и x_2 из I, $x_1 < x_2$, мы определим две функции $z = m(x_1, x_2)$ и $z = \mu(x_1, x_2)$, означающие соответственно точную верхнюю и точную нижнюю грани значений $f(x)$ в замкнутом интервале $[x_1, x_2]$. Для любого $r \in \mathbb{R}$ положим

$$J(r) = \sum_{i=1}^{k} (a_i - a_{i-1}) m(a_{i-1}, a_i)$$

и

$$j(r) = \sum_{i=1}^{k} (a_i - a_{i-1}) \mu(a_{i-1}, a_i)$$

где

где $p(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ – разбиение, соответствующее действительному числу r.

Введенные нами функции и отношения существуют также и в $\mathbb{R}^*$. Мы назовем нестандартное вещественное число r допустимым (разумеется, только в настоящем контексте), если максимум длин интервалов разбиения p, соответствующего r, т. е. $\gamma(r)$ есть бесконечно малая величина. Заметим, что в этом случае $\varphi(r)$ – число интервалов разбиения – обязательно является бесконечно большой величиной.

Обозначим через $\overline{\int_a^b} f(x)dx$ и $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ соответственно верхний и нижний интегралы Дарбу для $f(x)$ на интервале I. Легко доказывается следующая теорема.

Теорема. *$J(r) \simeq \overline{\int_a^b} f(x)dx$ и $j(r) \simeq \underline{\int_a^b} f(x)dx$ для каждого допустимого r из $\mathbb{R}^*$.*

А следовательно верна и теорема

Теорема. *Интеграл (по Риману) $\int_a^b f(x)dx$ от стандартной и ограниченной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ существует тогда и только тогда, когда $J(r) \simeq j(r)$ для некоторого (а следовательно, для каждого) допустимого r.*

Стоит отметить, что указанные суммы $J(r)$ и $j(r)$ являются воплощением интуитивного образа бесконечных сумм бесконечно тонких ступенек содержащих график функции и содержащихся в нем соответственно. И работа с ними в нестандартном анализе подобна работе с обычными конечными суммами, основной причиной того что бесконечные суммы ведут себя так же как и конечные, является элементарная эквивалентность моделей и тот факт, что большинство нужных нам свойств выражается в терминах языка $\mathcal{L}$.

В завершение разговора о гипердействительных числах можно добавить, что Робинсон развивает нестандартный анализ функций нескольких переменных. Идея идущая красной нитью вдоль этих рассуждений заложена в коммутировании ультрастепени модели и конечной декартовой степени, то есть $(\mathbb{R}^n)^* = (\mathbb{R}^*)^n$. Таким образом сигнатура языка, описывающего $(\mathbb{R}^*)^n$ содержится в сигнатуре языка $\mathcal{L}$. Заменив понятие модуля на норму, можно пробежаться в естественной манере по всем понятиям многомерного анализа, но идеи все те же, что и в случае прямой. Стоит отметить, что в более поздней книге «Non-Standard Analysis» [7], Робинсон пробегается по «всем возможным» точкам соприкосновения нестандартного анализа и «непрерывных» дисциплин. Однако мы коснемся лишь слегка вопросов связанных с такого сорта приложениями нестандартного анализа.

3.2 Топология и другие приложения

Этот параграф в основном посвящен обзору материала рассмотренного в книге Девиса «Прикладной нестандартный анализ» [1]. В связи с тем, что он старался развить по возможности как можно более общую концепцию нестандартной модели, нам придется немного обогатить наш язык $\mathcal{L}$. После чего дадим небольшой обзор как можно «выйти» в область топологии и нормированных пространств в рамках нестандартного анализа.

3.2.1 «Обогащение» языка

Обогащать язык приходится из-за того, что нам надо формулировать утверждения по типу «для некоторого подмножества верно, что...» или «для любого подмножества верно, что...», которые не формализуются в языке первого порядка. Воспользоваться языками высших порядков тоже без шансов, так как для них нет ни теоремы компактности, ни теоремы Лося (они там просто не верны). Потому можно обойтись следующим трюком. Уложим все множества, о которых мы хотим что-то сказать в одно большое, отношение принадлежности возьмем в качестве предиката и методами теории первого порядка будем строить «нечестные» модели. Опишем что именно будет происходить.

Пусть S некоторое множество. Рассмотрим следующую возрастающую последовательность множеств

$$S_0 = S, \quad S_k = S_{k-1} \cup \mathcal{P}(S_{k-1})$$

где $\mathcal{P}(X)$ – есть множество всех подмножеств множества X. В качестве $\widehat{S}$ положим объединение всех S_k и будем называть его, следую Девису, суперструктурой с индивидами S. Заметим, что в $\widehat{S}$ «живут» не только все возможные подмножества в S, но и функции определенные на некотором подмножестве в S. Вся идея заключается в замене структуры S на ее суперструктуру $\widehat{S}$, и изучение ее нестандартных моделей методами языка первого порядка.

Опишем требуемый язык $\mathcal{L}$. Для этого достаточно указать, что будет являться элементами ее сигнатуры. В качестве констант C положим саму суперструктуру $\widehat{S}$, выберем один предикатный символ $\in$, то есть $P = \{\in\}$ и два двуарных функциональных символа $F = \{<>, \upharpoonright\}$. Получаем частный случай языка первого порядка с конечными множествами предикатных и функциональных символов, а потому понятия термов и формул определено. Нужно объяснить лишь семантику «новых» значков. Сделаем это бегло. Символ $< \mu, \nu >$ в некоторой интерпретации языка $\mathcal{L}$ носит смысл упорядоченной пары, состоящей из μ и ν. А запись $\mu \restriction \nu$ означает значение функции μ на элементе ν, точнее, если существует и единственная пара $< \nu, \gamma >$, такая, что $< \nu, \gamma > \in \mu$, то $\mu \restriction \nu = \gamma$, иначе $\mu \restriction \nu = \emptyset$. То есть мы хотим научиться применять не только функции к элементам, но и все возмонжные множества к всевозможным множествам.

Теперь суперструктуру $\widehat{S}$ можно рассматривать как модель языка $\mathcal{L}$. И в качестве ее элементарного расширения строим некоторый аналог ультрастепени, а именно такой. Берем ультрастепень каждого S_k и объединяем, то есть

$$\widehat{S}^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(\prod S_k / \mathcal{F} \right)$$

Тогда в качестве множества элементов для $\widehat{S}^*$ можно взять $\prod S/\mathcal{F}$. Тогда очевидно, что $\widehat{S}^* \subseteq \widehat{\prod S/\mathcal{F}}$. И в случае нетривиального расширения S до $\prod S/\mathcal{F}$ последнее включение строгое. Именно в этом и заключается элемент нечестности. Мы понизили порядок языка, но потерями в запасе множеств в нестандартной модели. Элементы $\widehat{S}^*$ называются внутренними множествами, а элементы $\widehat{\prod S/\mathcal{F}} \setminus \widehat{S}^*$ – внешними. То есть в нестандартной структуре, мы имеем право говорить только о внутренних множествах, и главная трудность состоит в том, что теоретико множественные операции с бесконечным числом аргументов не сохраняют свойство «быть внутренним». Внешние множества могут встречаться в наших формулировках, но для применения принципа переноса их приходится сводить к внутренним. Однако «бонус» от такой конструкции состоит в возможности выйти в более «богатый мир» для доказательства теорем. А корректность такого перехода нам обеспечивает все та же теорема Лося. Точнее имеем равенство $Th(\widehat{S}) = Th(\widehat{S}^*)$, которое называлось принципом переноса. Основным техническим средством работы с суперструктурой и указанной ее нестандартной моделью является некий принцип направленности, который в некоторой степени заменяет нам наличие порядка на вещественной прямой в произвольном случае. В случае гипердействительной прямой, следуя Робинсону, мы не различали название констант в стандартной и нестандартной интерпретациях, в данной ситуации, следую Девису, будем обозначать интерпретация константы c в суперструктуре $\widehat{S}$ аналогично через c, а в $\widehat{S}^*$ через c^*.

3.2.2 Топология

Прежде всего дадим определение топологического пространства. (Его понятие обобщает понятие непрерывности для произвольного множества.) Множество X вместе с семейством $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ называется топологическим пространством, если

- $\emptyset$, $X \in \mathcal{O}$
- если $G_1, \ldots, G_n \in \mathcal{O}$, то $G_1 \cap \ldots \cap G_n \in \mathcal{O}$
- если $G_i \in \mathcal{O}$ для каждого $i \in J$, то $\bigcup\limits_{i \in J} G_i \in \mathcal{O}$

Элементы семейства $\mathcal{O}$ называются открытыми множествами.

Для того чтобы использовать нестандартные методы нужно положить $X \in \widehat{S}$. (Можно даже не предполагать, что $X \subseteq S$.) Тогда все подмножества X, а также и семейство $\mathcal{O}$ принадлежат $\widehat{S}$, то есть мы можем говорить на языке $\mathcal{L}$ как о подмножествах на X, так и о топологии.

Для каждой точки $p \in X$ положим множество его окрестностей

$$\mathcal{O}_p = \{\, G \in \mathcal{O} \mid p \in G \,\}$$

Тогда монадой точки p назовем следующий элемент $\widehat{\prod S/\mathcal{F}}$

$$\mu(p) = \bigcap_{G \in \mathcal{O}_p} G^*$$

Введем отношение $q \approx p$ для обозначения того, что $q \in \mu(p)$. Надо сказать, что, вообще говоря, монада может являться внешним множеством, а следовательно ею нельзя вольно оперировать при использовании принципа переноса. Однако, дело улучшает следующая теорема.

Теорема. *Для каждой точки $p \in X$ существует внутреннее множество $D \in \mathcal{O}_p^*$, такое, что $D \subseteq \mu(p)$.*

То есть каждая монада содержит внутреннее подмножество, ведущее себя как открытая окрестность. Оно то и дает нам возможность опелировать к элементарной эквивалентности.

Примером нестандартного определения стандартного понятия моет стать следующее утверждение.

Теорема. *X является хаусдорфовым пространством тогда и только тогда, когда из того, что p, $q \in X$ и $p \neq q$, следует $\mu(p) \cap \mu(q) = \emptyset$.*

То есть для проверки наличия у двух точек непересекающихся окрестностей достаточно установить, что непересекаются их бесконечно малые окрестности – монады. Куда более важным является следующий факт.

Теорема. *G открыто тогда и только тогда, когда $\mu(p) \subseteq G$ для любой точки $p \in G$.*

Во-первых, на последнюю теорему можно посмотреть как на еще один нестандартный аналог стандартного понятия, что само по себе полезно. А во-вторых, она означает, что монады задают топологию на X. Действительно, монады задают открытые множества и потому топологию. Следовательно, любое топологическое свойство должно быть определимо в терминах монад. Например свойство замкнутости.

Теорема. *F замкнуто тогда и только тогда, когда для любой точки $p \in X$, если $q \in F^*$ и $q \in \mu(p)$, то $p \in F$.*

Или свойство компактности (можно сравнить с формулировкой для $\mathbb{R}$).

Теорема. *K компактно тогда и только тогда, когда для любой точки $p \in K^*$ существует точка $q \in K$, такая, что $p \approx q$.*

Еще одним замечанием о топологических пространствах будет замечание о свойствах их отображений. А именно определим в терминах нестандартного анализа понятие непрерывного отображения $f\colon X \to Y$. Для этих целей нужно считать, что в нашем распоряжении имеется два топологических пространства X и Y и они являются элементами $\widehat{S}$. (И даже надо несколько больше, чтобы X и Y были подмножествами в S. Это требование нужно для того, чтобы можно было рассматривать функцию f^* как продолжение f, иначе их области определения могут не совпасть.) Нестандартным определением непрерывности отображения, как и следовало бы этого ожидать, является условие отображать бесконечно малые окрестности в бесконечно малые.

Теорема. *Пусть f отображает X в Y, где X и Y – топологические пространства. Пусть $p \in X$. Тогда функция f непрерывна в точке p в том и только в том случае, если $q \approx p$ влечет $f^*(q) \approx f(p)$. Или что тоже самое $f^*(\mu(p)) \subseteq \mu(f(p))$.*

В окончании стоит отметить как построенная теория обобщается на случай топологических групп. Полученные результаты будут близки к соответствующим для вещественной прямой.

Пусть G – топологический группа, то есть группа и топологическое пространство одновременно, причем групповые операции умножения и взятия обратного – непрерывны. Как и выше будем считать, что G подмножество в S.

Интересно расписать условия непрерывности операций в соответствующих терминах

- Если $x_0, y_0 \in G$, $x, y \in G^*$, $x \approx x_0$, $y \approx y_0$, то $x \cdot y \approx x_0 \cdot y_0$.
- Если $x_0 \in G$, $x \in G^*$, $x \approx x_0$, то $x^{-1} \approx x_0^{-1}$

Из принципа переноса следует, что G^* также является группой. Из нашего предположения о том, что $G \subseteq S$ следует, что G – подгруппа в G^*. Как и в случае $\mathbb{R}$ можно определить аналоги конечных элементов. А именно, множество околостандартных элементов G^* определим так

$$J = \{\, x \in G^* \mid x \approx x_0 \text{ для некоторого } x_0 \in G \,\}$$

Множество J является подгруппой в группе G^*. А если через e обозначить единичный элемент группы, то $\mu(e)$ (монада единицы) является нормальной подгруппой в J. Причем смежные классы по $\mu(e)$ есть в точности монады

$\mu(x)$ для $x \in G$. То есть определена последовательность гомоморфизмов $G \to J \to J/\mu(e)$. А для хаусдорфовых пространств указанная композиция превращается в изоморфизм. (Что как раз и получается в случае вещественной прямой.)

3.2.3 Нормированные пространства

Разговор о нормированных пространствах, прежде всего, затевается для упоминания о теореме Бернстейна-Робинсона. Вначале приведем саму формулировку теоремы, а после кратко обсудим за счет каких эффектов берется доказательство.

Теорема (Бернстейн-Робинсон)**.** *Пусть T – полиномиально компактный оператор на l_2. Тогда существует нетривиальное T-инвариантное замкнутое подпространство.*

Техника доказательства основана на применении методов конечномерной алгебры к бесконечномерным пространствам. Основная идея заключается в поиске пространства $E \in \mathcal{E}^*$, аппроксимирующего данное бесконечномерное пространство, где $\mathcal{E}$ – множество всех конечномерных подпространств l_2. Конечномерное пространство V обладает тем свойством, что для любого оператора в нем существует инвариантная цепочка подпространств $0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_m = V$, где m – размерность V. С операторами в l_2 работа ведется как с матрицами бесконечного размера. С учетом последнего и пользуясь компактностью можно аппроксимировать исходный оператор неким «удобным» оператором, для которого, использовав принцип переноса, можно получить требуемое инвариантное пространство для T. Уточним лишь откуда берется аппроксимация конечномерными пространствами. Дело в том что на матрицу можно смотреть как на оператор записанный в базисе $(e_1, \ldots, e_\nu)$, где ν возникает в качестве бесконечного натурального числа (как раз это условие аппелирует к полиномиальной компактности оператора). А следовательно, формулируя утверждения для конечного базиса $(e_1, \ldots, e_n)$ мы получаем нужные для исходного.

В завершение хочется отметить, что следуя указанному методу работы с суперструктурами, можно вести разговор о нестандартных структурах огромного числа известных математических объектов. Можно обсуждать вопросы теории меры и интеграла, в частности вопросы существования меры Хаара. Вопросы интегрирования и дифференцирования функционалов в банаховых пространствах, тем самым подготавливая почву для выхода в вариационное исчисление. А через применение указанных соображений в дифференциальных уравнениях, автоматически выходим в область механики и других прикладных наук. Выбор иллюстрируемого материала был сделан из желания показать две вещи; первая – продемонстрировать, как идеи теории моделей помогают пролить свет на то что классики не ошибались, и вторая – что нестандартный анализ отнюдь не является способом обоснования классиков, а намного более широкая математическая дисциплина.

4 Исторический обзор

В историческом обзоре будем почти полностью следовать изложению представленному в книге Успенского «Что такое нестандартный анализ?» [3], в которой автор немало руководствуется точкой зрения самого Робинсона. названия заглавий и деление также заимствовано из книги Успенского.

4.0.4 Лейбниц и «древняя история» нестандартного анализа

Возраст нестандартного анализа колеблется (в зависимости от точки зрения) от двух с половиной десятков до трех сотен лет. Два с половиной десятка получится, если считать, что нестандартный анализ зародился осенью 1960 г., когда его основатель, Абрахам Робинсон, сделал доклад на одном из семинаров Принстонского университета о возможности применения методов математической логики к обоснованию математического анализа. Триста лет получится, если считать началом нестандартного анализа появление символов бесконечно малых dx и dy в трактате Лейбница «Новый метод» [6, с. 166].

Трудно сказать с уверенностью, насколько в действительности Лейбниц был близок к идеям нестандартного анализа. Как пишет сам Робипсон в [7, гл. 10], «история предмета обычно пишется в свете его позднейшего развития. Уже более чем полвека все обзоры истории дифференциального и интегрального исчислений основывались на уверенности в том, что понятие бесконечно малых и бесконечно больших, если даже и непротиворечиво, бесполезно для развития анализа. В результате в работах этого периода заметно различие между строгостью, с которой рассматриваются идеи Лейбница и его последователей, и снисходительностью, проявляемой к провозвестникам идеи предела». Характерно, например, следующее высказывание Анри Лебега от 3 декабря 1926 г. «Бесконечно малые были когда-то туманными сущностями, встречавшимися в неясных и неточных формулировках. Все разъяснилось впоследствии благодаря понятию предела» [8, с. 6].

Считая, что идеи Лейбница и идеи сторонников понятия предельного перехода мерились двойным стандартом при несправедливом склонении весов правосудия в пользу предела, Робинсон предлагает во многом пересмотреть общую картину возникновения и развития математического анализа от Ньютона и Лейбница до Коши и Вейерштрасса.

Прежде чем излагать свою точку зрения, Робинсон резюмирует стандартный взгляд на историю развития математического анализа в следующих словах [7, с. 260]:

«После длительного периода, в течение которого были определены площади, объемы и касательные в различных частных случаях, во второй половине семнадцатого столетия Ньютоном и (несколько позже, но независимо) Лейбницем была построена общая теория дифференцирования и интегрирования. Касаясь обоснования введенных им понятий, Ньютон обращался то к бесконечно малым, то к пределам, то непосредственно к физической интуиции; его непосредственные последователи предпочитали последнее. С другой стороны, Лейбниц и его последователи развивали теорию исходя из дифференциалов первого и следующих порядков. Технические удобства обозначений, использовавших дифференциалы, привели к быстрому развитию Анализа и его приложений в Европе, где они были приняты. Однако внутренние противоречия этой концепции привели к осознанию того, что необходимы какие-то другие основания. Лагранж считал, что ему Удалось найти подходящий путь, взяв за основу тейлоровское разложение функции. Но первое строгое обоснование математического анализа было дано лишь Коши. Основой теории Коши было понятие предела, которое, будучи впервые выдвинуто Ньютоном, впоследствии поддерживалось Даламбером. Более формальное изложение методов Коши было дано Вейерштрассом (которого в некоторой степени предвосхитил Больцано). После создания теории пределов использование бесконечно больших и бесконечно малых превратилось в оборот речи, применяемый в выражениях типа «... стремится к бесконечности». Дальнейшее развитие теории неархнмедовых полей было целиком предоставлено алгебре.»

Этот стандартный взгляд, по мнению Робинсона, в некоторых отношениях «должен быть дополнен или даже изменен». В доказательство этого Робинсон приводит большое количество выдержек из сочинений Лейбница и других упомянутых выше авторов. Как считает Робинсон, «... отношение Лейбница к бесконечно большим и бесконечно малым величинам в Анализе в основном оставалось неизменным в течение двух последних десятилетий его жизни. Он полностью одобрял их введение, но считал их «идеальными элементами», подобными мнимым числам. Эти идеальные элементы подчиняются тем же законам, что и обычные числа. Тем не менее они представляют собой не более чем удобные фикции, необходимые для облегчения рассуждений и открытий. Всегда, при желании, можно исключить их использование и вернуться к стилю античных математиков, рассуждая в терминах величин, достаточно больших (или малых) для того, чтобы ошибка была меньше любой наперед заданной. Все это отчетливо н неоднократно утверждается в сочинениях Лейбница» [7, с. 261].

Методы Лейбница господствовали в континентальной Европе в течение более чем 50 лет. Однако во второй половине XVIII столетия начались поиски альтернативных путей построения анализа. В качестве такого пути Лагранж предлагал рассматривать разложения функций в степенные ряды, предполагая, по-видимому, что любая или почти любая функция может быть разложена в такой ряд. Даламбер предлагал понятие продела в качестве исходного для построения математического анализа. Он писал:

«Говорят, что одна величина является пределом другой, если вторая может приблизиться к первой ближе, чем на любую заданную величину... Теория пределов является основанием подлинной Метафизики дифференциального исчисления... В дифференциальном исчислении речь идет не о бесконечно малых величинах, как это обычно утверждают; речь идет лишь о пределах конечных величин... Термином «бесконечно малая» пользуются лишь как сокращением...»

Эти высказывания Даламбера выглядят как изложение (хотя и не вполне точное) современной точки зрения на предел. Можно было бы предположить, что с этого времени понятие бесконечно малых будет полностью устранено. Это, однако, не так. Коши, рассматриваемый обычно как основатель современного подхода к построению анализа, использует понятие бесконечно малой величины. Пытаясь объяснить в современных терминах, что Коши называет «величиной», можно предположить, что величина – это функция с действительными значениями, определенная на упорядоченном множестве без наибольшего элемента. Коши, однако, отнюдь не сводит величины к функциям. Наоборот, он говорит о функции как о соотношении, связывающем две величины. В его изложении бесконечно малые и пределы фигурируют как равноправные компоненты обоснования анализа. Проиллюстрируем стиль изложения Коши на примере знаменитой «ошибки Коши» – его «доказательства» того, что сумма функционального ряда $u_0(x) + u_1(x) + \ldots$, составленного из непрерывных функций, непрерывна. Формулировка Коши выглядит вполне современно: «Если различные члены ряда... являются функциями одной в той же переменной x, непрерывными по отношению к этой переменной в окрестности данной точки, в которой ряд сходится, сумма ряда также является непрерывной в окрестности этой точки».

Доказательство, однако, апеллирует к бесконечно малым величинам. Вводя обозначения

$$s_n(x) = u_0(x) + \ldots + u_n(x)$$
$$s(x) = \lim s_n(x),\ r_n(x) = s(x) - s_n(x)$$

Коши рассматривает «приращения, которые получают эти три функции, когда x увеличивается на бесконечно малую величину. Приращение s_n будет бесконечно малой величиной...; приращение r_n станет несущественным..., если взять n очень большим...».

Вернувшись к этому утверждению (уже после приведенного Абелем контрпримера – ряда из непрерывных функций, сумма которого разрывна), Коши формулирует такое утверждение: если u_i – непрерывные функции и «сумма $u_n + \ldots + u_{n'-1}$ всегда бесконечно мала при бесконечно большом n и $n' > n$», то ряд $\sum u_i$ сходится к непрерывной функции. Здесь уже и формулировка требует истолкования. Если толковать это так: «$u_n + \ldots + u_{n'-1}$ бесконечно мала при любых бесконечно больших n и $n' > n$ и любом (не обязательно стандартном!) x», то мы приходим к понятию равномерной сходимости, фигурирующем в современном варианте аналогичной теоремы (о непрерывности предела равномерно сходящегося ряда непрерывных функций).

Сказанное показывает, что точка зрения Коши, по-видимому, не так проста и не сводится, как это может показаться, к нечеткому изложению наших нынешних взглядов.

Обзор «древней истории» нестандартного анализа представляет собой выдержки из книги Успенского [3] с прореживанием цитат и некоторых замечаний автора.

4.0.5 Робинсон и «новая история» нестандартного анализа

К 1960 г. методы построения нестандартных моделей (и с помощью ультрафильтров, и с помощью теорем полноты и компактности) были давно разработаны и хорошо известны специалистам по теории моделей, одним из основателей которой был А. Робинсон. Оставалось «всего лишь» соединить их с идеями о применении бесконечно малых величин в анализе, чтобы положить начало бурному развитию нестандартного анализа.

В 1961 г. появилась статья А. Робипсопа «Нестандартный анализ» в Трудах Нидерландской академии наук [10]. В статье были намечены как основные положения нестандартного анализа, так и некоторые его приложения (например, к аналитической механике). В этой статье Робинсон, в частности, писал: «Наша главная цель – показать, что эти модели дают естественный подход к старой почтенной проблеме построения исчисления, включающего бесконечно большие и бесконечно малые количества. Как хорошо известно, использование бесконечно малых, настойчиво защищаемое Лейбницем и без колебаний принимаемое Эйлером, было дезавуировано с появлением методов Коши, поставивших математический анализ па твердую основу». (Заметим в скобках, что за твердость основы надо было платить и сложностью аппарата, и отдалением от физической наглядности.)

Итак, до 1961 г. понятие бесконечно малой постоянной величины, бесконечно малого числа, третировалось как в лучшем случае нестрогое, а в худшем – бессмысленное. Робинсон [10] впервые обнаружил, что этому понятию можно придать точный математический смысл. В течение последующих восьми лет вышли в свет три монографии, излагающие нестандартную теорию: в 1962 г. – книга У. А. Дж. Люксембурга «Нестандартный анализ. Лекции о робинсоновой теории бесконечно малых я бесконечно больших чисел» [9], в 1966 г. – книга самого А. Робинсона «Нестандартный анализ» [7] и в 1969 г. – книга М. Маховера и Дж. Хиршфелда «Лекции о нестандартном анализе» [11] (из 77 страниц этих «Лекций» действительной прямой отведено немногим более двух: «нестандартный анализ» понимается здесь в самом широком смысле). Наибольший резонанс вызвала книга Робинсона, вышедшая в известной серии «Исследования по логике и основаниям математики». В девяти первых главах этой монографии содержалось как построение необходимого логико-математического аппарата (со ссылкой на А. И. Мальцева как автора лежащей в основе этого аппарата теоремы компактности), так и многочисленные приложения – к дифференциальному и интегральному исчислению, к общей топологии, к теории функций комплексной переменной, к теории групп Ли, к гидродинамике и теории упругости. Специальный интерес представляет последняя, десятая глава, в которой автор излагает свой взгляд на историю развития математического анализа.

Помимо выхода книги Робинсона, в 1966 г. в нестандартном анализе произошло еще одно событие. Появилась статья А. Р. Бернстейна и А. Робинсона [12], в которой впервые методами нестандартного анализа было получено решение ранее поставленной проблемы, относящейся к обычным, «стандартным» математическим объектам. Речь идет о проблеме инвариантных подпространств для полиномиально компактных операторов.

В очерке П. Р. Халмоша «Взгляд в гильбертово пространство» [13] в качестве девятой проблемы фигурирует поставленная К. Т. Смитом задача о существовании инвариантного подпространства для таких операторов T в гильбертовом пространстве l_2, для которых оператор T^2 компактен. Решение этой проблемы и было получено А. Р. Бернстейном и А. Робинсоном методами нестандартного анализа; они доказали, что любой полиномиально компактный оператор в гильбертовом пространстве l_2 имеет нетривиальное инвариантное замкнутое подпространство. В дальнейшем Бернстейн, используя нестандартный анализ, распространил теорему Бернстейна-Робинсона на случай полиномиально компактных операторов в произвольных банаховых пространствах над полем комплексных чисел [14].

Теорема Бернстейна-Робинсона представляет собой отнюдь не единственный пример применения методов нестандартного анализа. Число и разнообразие таких применении (заложенных еще Робинсоном) неуклонно растут. Приложения нестандартного анализа внутри математики охватывают обширную область от топологии (см. [1, с. 210-211], [15, 16, 17]) до теории дифференциальных уравнений [17], теории мер и вероятностей (в которой возникает возможность понимания вероятности события как отношения бесконечного числа благоприятных исходов к общему числу исходов), см. [19, 20, 21, 22, 23, 24, 25] и теории игр [26]. Бесконечно малые числа (в смысле нестандартного анализа) оказываются полезными в исследовании бесконечно малых величин в смысле стандартных учебников анализа (функций, стремящихся к нулю), см. [27, 28].

Что касается внематематических приложений, то среди них встречаются даже приложения к математической экономике (рассматривается рынок с бесконечно большим числом участников, каждый из которых вносит бесконечно малый вклад) [29, 30]. В квантовой механики вводится нестандартное гильбертово пространства $^*l_2$ (традиционно формулируемой в терминах «обычного» пространства l_2), см. [31], а также [32] (рассматривается нестандартное определение фейнмановского интеграла по путям), [33] (рассматривается бесконечная флуктуация поля в бесконечно малой области) и [34]. А в статистической механике становится возможным рассматривать системы из бесконечного числа частиц, см. [35]. Интерес физиков к нестандартному анализу обусловил появление его популярных изложений в физических журналах ([36, 37]).

Помимо применений к различным областям математики (и не только математики), исследования в области нестандартного анализа включают в себя и исследование самих нестандартных структур (см., например, [38]).

В 1976 г. вышли сразу три книги по нестандартному анализу: «Элементарный анализ» и «Основания исчисления бесконечно малых» Г. Дж. Кейслера ([39, 40]) и «Введение в теорию бесконечно малых» К. Д. Строяна и В. А. Дж. Люксембурга [41]. Первая из них представляет собой написанный с нестандартных позиции учебник по математическому анализу – типа учебника для втузов с повышенными требованиями по математике. В этой книге большое число примеров и упражнений, однако многие доказательства даны лишь эскизно; само существование поля гипердействительных чисел и некоторый вариант принципа переноса провозглашены в качестве аксиом. Все необходимое обоснование перенесено во вторую книгу, тесно связанную с первой в выступающую в качестве руководства для преподавателей. «Основания исчисления бесконечно малых» содержат тот материал, который следует предварительно изучить, чтобы квалифицированно использовать в преподавании «Элементарный анализ». Наконец, книга Строяна и Люксембурга – это фундаментальная монография, вызывающая при чтении трудности даже у специалистов.

В 1977 г. вышла книга М. Девиса «прикладной нестандартный анализ» [1]. В данной книге понимание термина «нестандартный анализ» идет в широком смысле общей абстрактной теории; действительно, первая глава книги посвящена именно такой теории, а остальные главы – приложениям этой теории. Так, в главе второй общие построения первой главы применяются к изучению множества действительных чисел $\mathbb{R}$, а в главе третьей – к изучению метрических и, более общо, топологических пространств. В главе четвертой рассматривается приложение методов нестандартного анализа к задачам исследования нормированных линейных пространств, а в главе пятой – к исследованию гильбертова пространства l_2; центральное место в последней главе занимает доказательство ранее упоминавшейся теоремы Бернстейна-Робинсона.

В 1981 г. в серии «Lecture notes in mathematics» вышла книга Р. Лутца и М. Гозе «Нестандартный анализ: практическое руководство с приложениями» [42]. В этой книге после изложения основных принципов нестандартного анализа рассматриваются вопросы теории возмущений. Грубо говоря, задача теории возмущений состоит в следующем. Имеется какой-то объект (многочлен, линейный оператор, алгебра Ли, дифференциальное уравнение и т. д.). Его чуть-чуть изменяют. Как связаны свойства получившегося объекта со свойствами исходного? На языке нестандартного анализа задача ставится так. Исходный объект является стандартным. Изменение, которому он подвергается, бесконечно мало. Что можно сказать о свойствах измененного объекта, если нам известны свойства исходного? Мы видим, что понятия нестандартного анализа фигурируют уже в самой постановке задачи (а не только в ее решении). Разумеется, можно пытаться перевести задачу на язык классического анализа (без бесконечно малых) и решать ее классическими средствами, но, как пишут авторы рассматриваемой книги, в результате применения нестандартных методов появляются «как изящные формулировки, так и интуитивно более ясные доказательства» [42, с. 127].

В частности, в 8-м уроке части IV книги Лутца и Гозе рассматривается так называемая «проблема уток». Эта проблема состоит в требовании объяснить, каким образом у уравнения ван дер Поля

$$\varepsilon\ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x = a$$

где ε положительно и достаточно мало, исчезает предельный цикл, когда параметр a, возрастая, переходит через значение 1. Рассмотрение параметра

ε не просто как малого действительного, но как бесконечно малого гипердействительного числа оказалось для этой задачи чрезвычайно полезным.

В заключительном параграфе учебного пособия А. Г. Кусраева и С. С. Кутателадзе «Субдифференцпалы и их применения» (Новосибирск, 1985.–88 с.), названном «Конус Кларка», авторы, приведя соответствующее определение, указывают на с. 72: «с первого взгляда невозможно понять ни свойства конуса Кларка, ни сам смысл его формального определения». Последующие страницы пособия посвящены разъяснению этих свойств и этого смысла на языке нестандартного анализа (причем отмечается, что «с качественной точки зрения инфинитезимальные касательные конусы представляют собой результаты разглядывания множества в микроскоп»).

Наряду с изложенным подходом к нестандартному анализу (восходящим к Робинсону) существует и другой подход.

Наметим лишь общую его схему (следуя работе Нельсона [43]; другой способ уточнение обсуждается в [44]). Рассмотрим аксиоматическую систему теории множеств и добавим к ней новое неопределяемое понятие «x – стандартное множество» (в дополнение к уже имевшемуся неопределяемому понятию «x – элемент множества y»). При этом сохраняются все имевшиеся ранее аксиомы этой системы (ничего не говорящие, естественно, о новом понятии «быть стандартным»), а также добавляются новые аксиомы. Грубо говоря, эти аксиомы соответствуют принципу переноса, принципу направленности и возможности рассматривать произвольные множества в стандартной суперструктуре. При этом оказывается, что возникающее расширение аксиоматической теории множеств является консервативным в том смысле, что всякая выводимая в этом расширении формула обычной теории множеств (т. е. не содержащая понятия «стандартный») выводима и в обычной теории множеств. Таким образом, для «старых» формул «новые» средства доказательства равносильны «старым», хотя – и в этом пафос всего нестандартного анализа – «новые» доказательства могут быть более короткими и естественными, чем «старые» доказательства тех же утверждений.

Различие между робинсоновским подходом к нестандартному анализу и новым, аксиоматическим подходом к нему проявляется не столько в математических результатах, которые с их помощью могут быть получены, сколько в той позиции, с которой мы их рассматриваем. Робинсон пользуется теорией моделей, в которой в качестве основы лежит теория множеств, то есть мы тестируем утверждения нашего языка в моделях «сотканных» из множеств. Последняя позиция предлагает заменить «область» объектов, в которой мы будем тестировать наши высказывания, то есть сменить теорию множеств на более выразительную, но не на столько чтобы не приобрести новых утверждений и не потерять в них. Как раз на этом и завязан принцип переноса. При таком подходе рассмотрение уже стандартной модели вещественных чисел дает нам нужный результат, просто надо считать, что мы никогда не использовали в наших рассуждениях уже имеющихся в нашей модели выразительных средств связанных с понятием стандартности.

В 70-е годы нестандартный анализ (точнее, элементарный математический анализ, но основанный на нестандартном подходе) преподавался в ряде высших учебных заведений США. Некоторые итоги такого рода преподавания были подведены в методической статье, опубликованной в 1976 г. в «Американском математическом ежемесячнике» [45]. Статья заканчивается следующими фразами: «Опасения, ... что те студенты, которые будут изучать математический анализ при помощи инфинитезимальных (бесконечно малых) элементов, в меньшей степени овладеют основными навыками, должны быть, без сомнения, сняты. Более того, представляется весьма вероятным, что использование инфинитезимального подхода сделает курс математического анализа гораздо более живым и увлекательным как для преподавателей, так и для студентов».

Обзор «новой истории» нестандартного анализа, за исключением небольших правок и вставок разъяснительного характера, также целиком базируется на книге Успенского [3]. Все ссылки на литературу приведенные в указанном обзоре также включены в список литературы для полноты картины.

Список литературы

[1] М. Девис. Привладной нестандартный анализ. Изд-во «Мир». Москва. 1980.

[2] А. Робинсон. Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры. Изд-во «Наука». Москва. 1967.

[3] В. А. Успенский. Что такое нестандартный анализ? Изд-во «Наука». Москва. 1987.

[4] Г. Д. Кейслер, Ч. Ч. Чен. Теория моделей. М. Мир, 1974

[5] Б. Пуаза. Курс теории моделей.

[6] Г. В. Лейбниц. Избранные отрывки из математических сочинений./ Сост. и пер. А. П. Юшкевич// Успехи мат. наук.– 1948. – Т.2, вып 1(23).–С. 165-204.

[7] A. Robinson. Non-Standard Analysis.– Amsterdam: North-Holland, 1966.

[8] А. Лебег. Интегрирование и отыскание примитивных функций: Пер. с франц.– М.; Л.; ГТТИ, 1934.

[9] W. A. J. Luxemburg Non-Standard Analysis: Lectures on Robinson's Theory of Infinitesimals and infinitely Large Numbers.– Pasadena, 1962.– Revised edition.– Pasadena 1964.

[10] A. Robinson. Non-Standard Analysis.// Proc. Koninkl. ned. akad. wet. A.– 1961.– V. 64, n. 4.– P. 432-440.– Reprint// Indag. math.– 1961.– V. 23.– P. 432-440

[11] M. Machover, J. Hirschfeld. Lectures on Non-Standard Analysis.- Berlin: Springer, 1969.– (Lecture Notes In Mathematics, n. 94.)

[12] A. R. Bernstein, A. Robinson. Solution of invariant sub-space problem of K. T. Smith and P. K Halmos // Pacific. J. Math.– 1966.– V. 16, n. 3– P. 421-431.

[13] P. R. Halmos. A glimpse into Hilbert space// Lectures on Modern Mathematics.– V. I.– N. Y.; London, 1963.– P. 1-22.

[14] A. R. Bernstein. Invariant subspaces of polynomially compact operators on Banach spaces// Pacific J. Math.– 1967.– V. 21, n. 3.– P. 445-461.

[15] S. F. Bellenot. Nonstandard topological vector spaces// Victoria Symposium on Non-Standard Analysis/ Ed. A. Hurd.-Berlin: Springer, 1974.– P. 37-39.

[16] P. Goodyear. Double enlargements of topological spaces// Z. math. Logik Grundl. Math.– 1984– Bd. 30.– S. 389-392.

[17] A. Janz. Eine neue Variante der Nichtstandard-Analysis und einige ihrer Anwendungen in der allgemeine Topologie.– Berlin: Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin, 1980.– (Seminarbericht n. 30.)

[18] S. Alboverio, J. E. Fonstad, R. Hoegh-Krohn. Singular perturbations and nonstandard analysis// Trans. Amer. Math. Soc.– 1979.– V. 252.– P. 275-295.

[19] A. R. Bernstein, F. Wallenberg. Nonstandard measure theory// Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability Theory: Proceedings of an International Symposium on Non-Standard Analysis.– N. Y.: Holt-Rinehart and Winston, 1969.– P. 171-185.

[20] N. J. Cutland. Nonstandard measure theory and its applications// Bull. London Math. Soc.– 1983.– V. 15, part 6, n. 57.– P. 529-589.

[21] G. F. Lawler. A self-avoiding random walk// Duke Math. J.– 1980.– V. 47, n. 3.– P. 655-693.

[22] P. Loeb. Conversion from nonstandard to standard measure spaces and applications to probability theory// Trans. Amer. Math. Soc.– 1975.– V. 211.– P. 113-122.

[23] P. Loeb. Weak limits of measures and the standard part map// Proc. Amer. Math. Soc.– 1979.– V. 77, n. 1.– P. 128-135.

[24] R. Parikh, M. Parnes. Conditional probabilities and uniform sets// Victoria Symposium on Non-Standard Analysis/Ed. A. Hurd.– Berlin: Springer, 1974.– P. 180-194.

[25] E. Perkins. Weak invariance principles for local time// Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verwandte Gebiete.– 1982.– Bd 60.– S. 437-451.

[26] E. Wesley. An application of nonstandard analysis to game theory// J. Symbolic Logic.– 1971.– V. 36, n. 3.– P. 385-394.

[27] H. Levitz. Calculation of an order type: an application of non-standard methods// Z. math. Logik Grundl. Math.– 1982, Bd. 28.– S. 219-228.

[28] A. H. Lightstone, A. Robinson. Nonarchimedean Fields and Asymptotic Expansions.– Amsterdam: North-Holland, 1975.

[29] D. Brown, A. Robinson. A limit theorem on the cores of large standard exchange economies// Proc. Nat. Acad. Sci. USA.– 1972.– V. 69, n. 5.– P. 1258-1260.

[30] D. Brown, A. Robinson. Nonstandard exchange economies// Victoria Symposium on Non-Standard Analysis/ Ed. A. Hurd.– Berlin: Springer, 1974.– P. VIII-IX.

[31] M. D. Farukh. Applications of nonstandard analysis to quantum mechanics// J. Math. Phys.– 1975.– V. 16, n. 2.– P. 177-200.

[32] S. M. Moore. Nonstandard analysis applied to path Integrals and generalized functions// II nuovo cimento della società italiana di fisica.– 1982.– V. 70B, n. 2.– P. 277-290.

[33] P. J. Kelemen, A. Robinson. The nonstandard λ: $\varphi_2^4(x)$-model// J. Math. Phys.– 1972.– V. 13. n. 12.– P. 1870-1878.

[34] P. J. Kelemen. Quantum mechanics, quantum field theory and hyper-quantum mcchanics// Victoria Symposium on Non-Standard Analysis/Ed. A. Hurd.– Berlin: Springer, 1974.– P. 116-121.

[35] A. E. Hurd. Nonstandard analysis and lattice statistical mechanics; a variational principle// Trans. Amer. Math. Soc.– 1981.– V. 263. n. 1.– P. 89-110.

[36] J. Tarski. Short introduction to nonstandard analysis and its physical applications// Many Degress of Freedom in Field Theory: Proceedings of the 1976 International Summer Institute of Theoretical Physics, Bielefeld, Aug. 23-Sept. 4, 1976/Ed. L. Streit. – N. Y.; London: Plenum Press, 1978.– P. 225-239.

[37] A. Voros. Introduction to nonstandard analysis// J. Math. Phys.– 1973.– V. 14, n. 2.– P. 292-296.

[38] S. Kamo. Nonstandard natural number system and nonstandard models// J. Symbolic Logic.– 1981.– V. 46. n. 2.– P. 365-376.

[39] H. J. Keisler. Elementary Calculus.– Prindle: Weber & Schmidt, 1976. [Рецензия//Новые Книги за рубежом: Сер. А. – 1978.– n. 9.)

[40] H. J. Keisler. Foundations of Infinitesimal Calculus.– Prlndle: Weber & Schmidt, 1976.

[41] K. D. Stroyan, W. A. J. Luxemburg. Introduction to the Theory of Infinitesimals.– N. Y.: Academic Press, 1976.

[42] R. Lulz, M. Gose. Nonstandard Analysis: A Practical Guide with Applications.– Berlin: Springer, 1981.– 261 p.– (Lecture Notes in Mathematics, n. 881.) [Рецензия//Новые книги за рубежом: Сер. А.– 1983.– n. 1.– С. 15-17.]

[43] E. Nelson. Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis// Bull Amer. Math. Soc.– 1977.– V. 83. n. 6. – P. 1165-1198.

[44] K. Hrbaček. Nonstandard set theory// Amer. Math. Monthly.– 1979, October.– P. 659-677.

[45] K. Sullivan. The teaching of elementary calculus using the nonstandard analysis approach// Amer. Math. Monthly.– 1976.– V. 83, n. 5.– P. 370-375.