

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра вычислительной математики

Кубаев Вячеслав Андреевич

Перевод статьи по философии математики
Р. Benacerraf «What numbers could not be»

Научный руководитель: _____ к.ф.-м.н. Борисенко В.В.

Ведущий семинары: _____ к.ф.н. Катречко С.Л.

Москва

2008

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ЧЕМ ЧИСЛА НЕ МОГУТ БЫТЬ	5
I. ОБРАЗОВАНИЕ	6
II. ДИЛЕММА.....	12
III. ВЫХОД.....	20

Введение

Статья Пола Бенаццерафа «Чем числа не могут быть» была опубликована в 1965 году в журнале *Philosophical Review* и фактически стала манифестом такого направления в философии математики как структурализм. В этой статье П. Бенаццераф привел свой анализ проблемы онтологического статуса математических объектов – чисел натурального ряда. Он поставил под сомнение референтную интерпретацию чисел, принимаемую в рамках математического реализма, которая состоит в том, что используемые нами числовые слова являются десигнатами некоторых объектов. В последнем случае математические объекты – числа – имеют сходный онтологический статус с обычными физическими объектами, и поэтому каждое натуральное число существует само по себе, без каких-либо ссылок на другие натуральные числа.

В статье «Чем числа не могут быть» П. Бенаццераф показал, что мы можем указать бесконечное число существенно различных (например, в отношении понятия мощности) множеств, которые в равнозначной степени будут играть роль чисел натурального ряда. Основная возникающая при этом проблема состоит в том, что для объектов, которыми, как мы предполагаем, являются числа, должен быть выполнен принцип индивидуализации (принцип тождественности). Однако в случае чисел мы оказываемся не в состоянии провести такую процедуру индивидуализации, а значит, показать какое из предложенных множеств – кандидатов в числа – и является тем единственным на самом деле верным вариантом построения.

Предлагаемый Бенаццерафом выход из этой проблемы состоит в том, что нам следует отказаться от «тяжелого» требования объектности натуральных чисел. В качестве альтернативы понятию объекта Бенаццераф предлагает использовать понятие места в математической структуре. Так понимаемые натуральные числа вводятся не через понятие абстрактных объектов, а через указание их отношения с другими натуральными числами. Например, в рамках этого подхода 3 следует понимать как нечто, стоящее после 2, но перед 4. В этом случае вопрос об онтологическом статусе натуральных чисел может вообще не рассматриваться, поскольку природа элементов математической структуры является совершенно несущественной.

Основная задача, которая встает перед Бенаццерафом состоит в том, чтобы объяснить, каким образом так понимаемые натуральные числа выполняют все те функции, которые им приписываются в рамках математического реализма. В данной статье автор решает некоторые такие задачи и формулирует основные принципы работы с математическими структурами.

Если резюмировать сущность структурализма в применении в натуральным числам, то можно выделить следующие положения:

1. Натуральные числа являются структурой.
2. Элементы структуры ни как не привязаны к природе индивидуальных объектов.
3. Содержание натуральных чисел – это содержание основных отношений структуры.

Несмотря на то, что по признанию самого автора, статья носит скорее критический, а не позитивный характер, в ней П. Бенацераф, как уже было указано, дал начало новому направлению в философии математики и определил основные линии его развития. Это направление было в дальнейшем развито как самим автором, так и такими философами как С. Шапиро и М. Резник.

Чем числа не могут быть

ПОЛ БЕНАЦЕРРАФ

Внимание математика направлено, прежде всего, на математическую структуру, и его интеллектуальное удовлетворение возникает (отчасти) в наблюдении того, что данная теория представляет такую-то и такую-то структуру, того, в наблюдении того, как одна структура «смоделирована» в другой, или в обнаружении некоторой новой структуры и демонстрации ее связи с изученной ранее. ... Но ... математик удовлетворен, как только у него есть некие «сущности» или «объекты» (или «множества», или «числа», или «функции», или «пространства», или «точки») для работы, и он не вникает в их внутренние свойства или онтологический статус.

С другой стороны, логик-философ более щепетилен в вопросах онтологии и будет особенно интересоваться видом видов сущностей, которые действительно существуют. ... Он не будет удовлетворен, если ему просто скажут, что такие-то и такие-то сущности представляют такую-то и такую-то математическую структуру. Он захочет более глубоко вникнуть в вопрос о том, что представляют собой эти сущности, как они соотносятся с другими сущностями. ... Также он захочет спросить, является ли рассматриваемая сущность *уникальной*, или же является в некотором смысле *сводимой* к другим или *конструируемой* с помощью других, возможно, более фундаментальных сущностей.

- Р. М. Мартин, Интенция и Решение

Мы можем, ... используя ... [наши] ... определения, сказать, что подразумевается под фразой

«число $1 + 1$ принадлежит концепту F»,

а затем, на основании этого, придать смысл выражению

«число $1 + 1 + 1$ принадлежит концепту F»

и т.д., но мы никогда не сможем решить с помощью наших определений, принадлежит ли число Юлий Цезарь какому-либо концепту, или является ли тот же знаменитый завоеватель Галлии числом или нет.

- Г. Фреге, Основы арифметики

Большая часть работы над этой статьей была проделана во время работы автора в Принстонском университете на факультете Procter and Gamble. Выражаю этому искреннюю благодарность. Я признателен Полу Зиффу за полезные комментарии к раннему черновику этой статьи. Перепечатано с любезного разрешения редакторов из Philosophical Review 74(1965): 47-73.

I. Образование

Представьте себе Эрни и Джонни – сыновей двух ярых логиков, детей, которых обучали не обывательским (старомодным) способом, но для которых порядок в обучении был эпистемологическим порядком. Они не изучали счет сразу. Вместо того, чтобы начать свое математическое образование с арифметики, как это делают обычные люди, они сначала изучили логику – в их случае, на самом деле, теорию множеств. Затем им рассказали о числах. Но рассказать людям в их положении о числах было несложной задачей – очень похожей на ту, которая встала перед учителем месье Журдена (который, как это ни странно, был философом). Родители наших воображаемых детей должны были только указать, какая сторона или часть того, что дети уже знали под своими именами, является тем, что обычные люди называли «числа». Изучение чисел просто привело к изучению новых имен для знакомых множеств. Старые (теоретико-множественные) истины предстали в новом (теоретико-числовом) облики.

Способ, с помощью которого это было сделано, требует, тем не менее, некоторого исследования и перепроверки. Чтобы облегчить описание, я сконцентрируюсь на Эрни и прослежу его арифметическое обучение до завершения. Затем я вернусь к Джонни.

Это могло происходить следующим образом. Эрни сказали, что есть множество, элементы которого являются тем, что обычные люди называют (натуральными) числами, и что они являются тем, что он всегда знал как элементы (бесконечного) множества $\mathbb{N}$. Затем ему сказали, что есть отношение, определенное на этих «числах» (впредь я буду опускать как-вычки), отношение *меньше чем*, относительно которого числа являются вполне упорядоченными. Он узнал, что это отношение является на самом деле тем, определенным на $\mathbb{N}$, для которого он всегда использовал букву $\langle R \rangle$. И на самом деле, говоря сейчас интуитивно, Эрни мог проверить, что каждое непустое подмножество $\mathbb{N}$ содержит «наименьший» элемент – то есть такой, который находится в отношении R к самому себе, и что R является транзитивным, антисимметричным, нерефлексивным и связанным на $\mathbb{N}$. Короче говоря, элементы $\mathbb{N}$ образуют прогрессию, или серии, относительно R .

Затем было число 1, наименьшее число (для дальнейшего удобства, мы игнорируем 0). Эрни узнал, что то, что люди называют 1, есть самом деле элемент $\mathbb{N}$, первый, или наименьший, элемент $\mathbb{N}$ относительно R . Разговор о «последующих» (говорят, что у каждого числа есть такое) был легко переведен в термины концепта «следующего» члена $\mathbb{N}$ (относительно R). В этот момент было легко показать, что допущения, которые делают обычные смертные относительно чисел, были, на самом деле, теоремами для Эрни. На базе

своей теории он мог установить истинность аксиом Пеано – его преимущество перед обычными смертными, которые должны в большей или меньшей степени принимать их как данные, или самоочевидные, или бессмысленные-но-полезные, или какие угодно еще.¹

Есть еще две вещи, которые надо изучить Эрни, прежде чем можно было бы честно сказать, что он может разговаривать с обывателем. Необходимо указать ему, какие операции с элементами $\mathbb{N}$ являются теми, которые называют «сложение», «умножение», «возведение в степень» и т.д. И здесь он опять оказался в преимущественном положении с позиций эпистемологии. Тогда как обычным людям приходилось вводить эти операции при помощи рекурсивного определения, эвфемизм для постулирования, он мог показать, что эти операции могут быть *явно* определены. Так было показано, что постулаты сложения, предполагаемые некоторыми людьми, также могут быть выведены в его теории, как только определено, какие теоретико-множественные операции на самом деле являются сложением, умножением и т.д.

Последним элементом, необходимым для завершения образования Эрни, было объяснение *приложений* этих механизмов: счет и измерение., поскольку они используют концепты, выходящие за рамки тех, что уже были введены. Но к счастью, Эрни имел возможность заметить, что именно для него отвечало этим действиям (мы остановимся на счете, подразумевая, что измерение может быть объяснено либо подобным образом, либо с помощью счета).

Есть два вида счета, соответствующих транзитивному и нетранзитивному использованию глагола «считать». В одном, «счет» допускает явный объект, как в случае «счета шариков», в другом – нет. Я имею в виду случай из разряда случая с предоперационным пациентом, которого готовят к операционной. Маску с эфиром надевают ему на лицо и просят считать так быстро, как только он может. Ему вовсе не дают указаний считать что-либо. Ему просто говорят считать. К счастью, мы обычно учим первые несколько чисел в соответствии с множествами, в которых есть такое число элементов, т.е. с помощью *транзитивного* счета, (таким образом изучая использование чисел), а затем учимся формировать «оставшиеся» числа. На самом деле, «оставшиеся» всегда остаются чем-то относительно туманным. Большинство из нас просто учит, что мы никогда не остановимся, что наша нотация будет расширяться так далеко, как нам потребуется считать. Изучение этих слов и способа их повторения в правильной последовательности есть изучение *нетранзитивного* счета. Изучение их использования как мер множеств есть изучение *транзитивного* счета.

¹ Детали доказательств не должны нас задерживать

Несущественно, изучаем ли мы один тип счета до изучения другого, если мы рассматриваем начальные числа. Но что точно, и существенно, это то, что нам придется выучить некоторую рекурсивную процедуру для формирования *нотации* в правильном порядке до того, как мы научимся транзитивному счету, поскольку последнее означает явную или неявную связь между элементами числовой последовательности и членами того множества, которое мы пересчитываем. Кажется, тем не менее, что возможно выучить нетранзитивный счет без изучения транзитивного. Но не наоборот. Это, я думаю, относительно значимый момент. Но что именно *есть* транзитивный счет?

Сосчитать элементы множества означает определить мощность множества. Т.е. установить, что имеет место определенное отношение S между множеством и одним из чисел – т.е. одним из элементов $\mathfrak{N}$ (мы ограничимся здесь пересчетом конечных множеств). Говоря практически, в простейших случаях определяют, что множество имеет k элементов, перебирая (иногда метафорически) его элементы один за другим, как мы называем один за другим числа (начиная с 1 в порядке возрастания, причем последнее число, которое мы назовем, будет k). Пересчитать члены некоторого k -элементного множества b значит установить взаимно-однозначное соответствие между элементами b и элементами $\mathfrak{N}$, меньшими либо равными k . Отношение «указание-каждого-элемента- b -соответственно-называнию-чисел-до-и-включая- k » устанавливает такое соответствие.

Так как Эрнст имеет в своем распоряжении необходимую технику, чтобы показать, что для любых двух эквивалентных конечных множеств между ними существует такое соответствие, то в его системе утверждение о том, что любое множество имеет k элементов тогда и только тогда, когда оно может быть приведено во взаимно-однозначное соответствие со множеством чисел меньших либо равных k , будет теоремой.²

² Не все соглашались с тем, что эти две последние части в нашем рассмотрении (определение операций и определение мощности множеств) действительно необходимы для адекватной интерпретации чисел. У. О. Куайн, например, явно отрицает, что необходимо делать что-либо кроме того, что предоставить прогрессию, которая бы служила числами. Он утверждает следующее: «Может быть дано ... условие на все приемлемые экспликации чисел: *любая прогрессия* – т.е. любая бесконечная последовательность, каждый из членов которой имеет лишь конечное число предшествующих – безупречно подойдет. Рассел придерживался мнения, что необходимо выполнение дополнительного условия для того, чтобы был способ использовать чьи-либо будущие числа для измерения множественности: способ сказать, что (1) Есть n объектов x таких, что Fx . Тем не менее, это было ошибкой, поскольку любая прогрессия удовлетворяет этому дополнительному условию. Т.к. (1) может быть перефразирована, если сказать, что числа меньшие чем n [Куайн использует также 0] могут быть связаны с объектами x такими, что Fx . Это налагает требование на то, что наш аппарат должен включать достаточную часть теории отношений, чтобы мы могли говорить о связи или отношении один к одному, но это не налагает ни каких специальных требований на наши числа, кроме того, что они должны образовывать прогрессию» (Куайн 1960: 262-3). Я не соглашусь. Объяснение мощности множества – т.е. использование чисел для «транзитивного счета», как я его назвал – неотъемлемая часть объяснения чисел. Действительно, если бы она могла быть исключена на тех основаниях, на которых это предлагает сделать Куайн, мы бы могли точно так же сказать, что необходимых условий нет вовсе, поскольку

До того, чтобы можно было сказать, что образование Эрри (и анализ чисел) завершены, необходимо отметить одно последнее условие на R : R должно быть по меньшей мере рекурсивным, и по возможности примитивно рекурсивным. Я никогда не видел это условие включенным в анализ чисел, но это требование мне представляется настолько очевидным, что вряд ли можно о нем спорить. Мы уже видели, что Куайн (косвенно) отвергает, что этот факт составляет дополнительное требование: «Может быть дано ... условие на все приемлемые экспликации чисел: *любая прогрессия* – т.е. любая бесконечная последовательность, каждый из членов которой имеет лишь конечное число предшествующих – безусловно подойдет» (см. замечание 2). Но предположим, например, что кто-то выбрал прогрессию $A = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, полученную следующим образом. Разделим положительные целые числа на две последовательности B и C , предполагая, что в каждой последовательности элементы упорядочены по величине. Пусть B (т.е. $b_1, b_2, \dots$) – последовательность чисел Геделя корректных формул в теории квантификации, относительно подходящей нумерации, и пусть C (т.е. $c_1, c_2, \dots$) – последовательность положительных целых чисел, которые не являются числами корректных формул теории квантификации относительно этой нумерации (упорядоченные по величине в каждом случае). Теперь в последовательности A для каждого n положим $a_{2n-1} = b_n$ и $a_{2n} = c_n$. Очевидно, что A , хотя и является прогрессией, не является рекурсивной, тем более примитивно рекурсивной, прогрессией. Почти очевидно, что эта прогрессия будет неприменима в качестве чисел, по той причине, что мы ожидаем, что если мы знаем, какие числа обозначают два выражения, то мы можем за конечное число шагов вычислить, какое число «больше» (в этом случае, какое число встретиться в A позднее)³. Более того, если известно, что множество b содержит n элементов, а $c = m$, то должно быть возможно определить за конечное число шагов, какое содержит больше элементов. Тем не менее, это то, что здесь точно невозможно. Эта способность (сказать после конечного числа шагов, какое из двух чисел больше) связана с

ку то единственное, которое он привел вряд ли необходимо, в предположении о том, что «наш аппарат включает достаточную часть теории множеств, чтобы включать прогрессию». Но я вернусь к этому моменту.

³ Разумеется, есть сложность, связанная с понятием «знание, какие числа обозначают два выражения». Это старая проблема, иллюстрируемая следующим примером. Абрахам думает о числе и Исаак думает о числе. Назовем число Абрахама a и число Исаака i . Число a больше чем i ? Я знаю, какое число обозначает a : число Абрахама. И то же самое с i . Но это никак не помогает мне определить, какое из них больше. Тем не менее, этого можно избежать, если потребовать, чтобы числа были даны в канонической нотации следующим образом. Пусть обычное (рекурсивное) определение чисел служит для определения множества «чисел», но не для установления их порядка. Затем возьмем введенное выше определение A в качестве определяющего отношение менее чем на элементах этого множества, а следовательно, определяющего прогрессию. (Тот факт, что нерукурсивная прогрессия, которую я использовал, является прогрессией из чисел несущественно для предмета разговора. Я использовал ее здесь просто чтобы избежать изощренного многословия, которое появилось бы, излагая я все теоретико-множественно. Можно получить такой же результат, если положить, что «числа» – это формулы теории квантификации, вместо их чисел Геделя, и использовать формулы автономно.)

(как транзитивным, так и нетранзитивным) счетом, поскольку эта возможность эквивалентна возможности формирования («называния») чисел упорядоченными по величине (т.е. в соответствии с их порядком в A). Вы не сможете узнать, что называете их упорядоченными по величине, поскольку, если не существует рекурсивного правила для формирования ее членов, Вы не сможете узнать каков должен быть их порядок по величине. Это, разумеется, очень сильное заявление. Здесь есть два вопроса, каждый из которых интересен, и ни один, по понятным причинам, не может быть обсужден в этой статье. (1) Может ли человеческое существо быть процедурой решения для нерекурсивных множеств, или же организм человека в лучшем случае машина Тьюринга (в соответствующем смысле)? Если верно последнее, тогда не должно существовать человека, который смог бы сформировать последовательность A , а тем более *знать*, что это то, что он делал. Даже если ответ на (1), тем не менее, таков, что человек *может* (действовать или быть использован) как процедура решения, следующий вопрос все равно возникает и требует ответа: (2) может ли он *знать* истинность всех утверждений вида $i < j$ ($i, j \in A$)? И кажется, что то, что составляет знание, может заранее исключать такую возможность.

Но я достаточно отвлекся на эту тему. Основной момент состоит в том, что отношение « $<$ » на числах должно быть рекурсивным. Понятно, что я не могу дать строгого доказательства того, что это является требованием, поскольку я не могу доказать, что человек в лучшем случае является машиной Тьюринга. То, что требование выполнено в случае обычного отношения « $<$ » на числах – образец отношения примитивной рекурсии – и было выполнено в каждом подробном анализе, который был когда-либо предложен, дает хорошее свидетельство в пользу его корректности.⁴ Я просто делаю явным то, что почти все принимают как данность. Далее в этой статье мы увидим, что одно достоверное соображение по поводу того, почему это принимается как данность, связано очень близко с одним из взглядов, на котором я буду настаивать.

Таким образом, Эрнест узнал, что на самом деле он занимался теорией чисел в течение всей своей жизни (Я полагаю, что в большой степени подобно тому, как наши дети узнают этот удивительный факт по поводу самих себя, если новая волна преподавателей математики сумеет их всех захлестнуть).

Должно быть ясно, что образование Эрнеста теперь завершено. Он научился разговаривать с обывателем, и должно быть очевидно, что мое предыдущее описание было верно. Он имел в своем распоряжении все, что необходимо для концепта числа. Кто-то может даже ска-

⁴ Нет необходимости говорить, что оно очевидно выполнено в каждом анализе, который давал бы действительную связь между именами «чисел» в анализе и более общими именами, под которыми мы знаем эти числа.

зять, что у него уже был концепт числа, кардинала, ординала и обычных операций над ними, и надо было просто выучить другой словарь. Я заявляю, что нет ничего, что надо было бы сделать в задаче «сведения» концепта числа к логике (или теории множеств), что не было бы сделано выше, или не могло бы быть сделано в рамках тех линий, что были очерчены.

Подводя итог: Было необходимо (1) дать определение «1», «числа» и «последующего», и «+», и «X» и т.д., на основе которых законы арифметики могут быть выведены, и (2) объяснить «внематематическое» использование чисел, принципиальным из которых является счет – посредством этого вводя концепт мощности множеств и кардинальных чисел.

Я заверяю, что обе задачи были удовлетворительно выполнены, что предшествующий текст содержит элементы правильного изложения, хотя и не полного в некоторых частях.

Ничего из вышеописанного не было принципиально новым; я приношу свои извинения за очередное изложение этих деталей, но для меня будет важно, чтобы обоснованность изложения выше была ясно видна. Поскольку если оно обосновано, то, по-видимому, Эрнст теперь знает, какими множествами являются числа.

II. Дилемма.

История, рассказанная в предыдущей части, могла бы быть также рассказана о друге Эрни – Джонни, поскольку его образование также удовлетворяет только что упомянутым условиям. Довольные тем, что они узнали, они начали доказывать теоремы о числах. Сравнивая записи, они скоро поняли, что что-то было неверно, поскольку немедленно возник спор по поводу того, принадлежит ли 3 к 17. Эрни говорил, что принадлежит, Джонни – что нет. Попытки разрешить эту проблему задавая вопросы обывателям (которые долгое время работали с числами как числами) по понятным причинам приводили только к непонимающим взглядам. В поддержку своей точке зрения Эрни указывал на свою теорему о том, что для любых двух чисел x и y , x меньше y тогда и только тогда, когда x принадлежит y и x является точным подмножеством y . Поскольку по общему признанию 3 меньше 17, то отсюда следует, что 3 принадлежит 17. Джонни, с другой стороны, возражал, что «теорема» Эрни не верна, поскольку для двух данных чисел x и y , x принадлежит y тогда и только тогда, когда y является последующим для x . Это были очевидным образом несовместимые «теоремы». Исключая вероятность несостоятельности их общей теории множеств, несовместимость должна содержаться в определениях. Во-первых, «менее-чем». Но оба утверждали, что x меньше чем y тогда и только тогда, когда x находится в отношении R к y . Небольшое исследование, тем не менее, обнаружило источник проблемы. Для Эрни последующим для числа x относительно R было множество, состоящее из x и всех членов x , тогда как для Джонни последующим для x было просто $\{x\}$, одноэлементное множество – множество, единственным элементом которого является x . Поскольку для каждого из них 1 было одноэлементное множество с элементом – пустым множеством, их соответствующие прогрессии были:

$$(i) \quad \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}, \dots \text{ для Эрни;}$$

$$(ii) \quad \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \dots \text{ для Джонни.}$$

Были и дальнейшие разногласия. Как вы подтвердите, Эрни мог доказать, что множество содержит n элементов тогда и только тогда, когда для него может быть установлено взаимно-однозначное соответствие с множеством чисел меньших либо равных n . Джонни соглашался. Но они расходились во мнениях, когда Эрни заявлял далее, что множество содержит n элементов тогда и только тогда, когда для него может быть установлено взаимно-однозначное соответствие с самим числом n . Для Джонни любое число является одноэлементным множеством. Короче говоря, их кардинальные отношения различались.

Для Эрн 17 содержало 17 элементов, тогда как для Джонни – только один⁵. Так уж случилось.

В данных обстоятельствах стало совершенно очевидно, почему возникли эти противоречия. Но вот что не стало совершенно очевидно, так это как их необходимо разрешать. Поскольку проблема была следующей: Если выводы в предыдущем разделе верны, тогда оба мальчика получили верное понятие чисел. Каждому сказал его отец, какое множество на самом деле было множеством чисел. Каждого научили каким объектом – чье независимое существование он мог доказать – было число 3. Каждому изложили значение (и связь) числовых слов, для которых не применимы исключения, и на основании которых может быть объяснено все, что мы знаем о числах. Каждого научили, что определенное множество объектов содержало то, что на самом деле имели в виду люди, использующие числовые слова. Но множества были различны в каждом числе. И были различны отношения, определенные на этих множествах, включая принципиально значимые, такие как мощность множества и ему подобные. Но если, с чем, я думаю, мы согласимся, положения предыдущей части были верны, не только в данном случае, но верны в том смысле, что они содержали условия, которые были необходимы и *достаточны* для любого верного рассмотрения обсуждаемого явления, тогда тот факт, что они разошлись во мнении, какими конкретными множествами являются числа, губителен для взгляда, подразумевающего, что каждое число является некоторым определенным множеством. Поскольку если число 3 является на самом деле некоторым определенным множеством b , то не может быть такого, что два верных понятия значения «3», и, следовательно, также его связей, приписывали два различных множества трем. Т.к. если верно, что для некоторого множества b , $b = 3$, тогда не может быть верно для некоторого множества c , отличного от b , $c = 3$. Но если подход Эрн адекватен, в силу того, что он удовлетворяет условиям, приведенным в части I, то тоже самое относится к в Джонни, поскольку он также удовлетворяет тем условиям. Мы оказались в затруднительном положении. У нас есть два (на самом деле, бесконечно много) подхода к значению определенных слов («число», «один», «семнадцать» и т.д.). каждый из которых удовлетворяет тому, что представляется необходимыми и достаточными условиями для верного подхода. Несмотря на то, что есть различия между двумя подходами, представляется, что оба верны, в силу того, что удовлетворяют общим условиям. Если так, то различия несущественны и не затрагивают корректности. Более того, в терминологии Фреге, каждый подход фиксирует *смысл* слов, анализ которых

⁵ Некоторые из их теоретических кузенов имели даже более своеобразные взгляды: для того, чтобы иметь мощность 5, множество должно принадлежать одному из чисел 5. Я говорю «некоторые из», поскольку другие не использовали это определение мощности или чисел, но присоединялись к Эрн или Джонни.

он содержит. Каждый подход должен также, следовательно, фиксировать *связь* этих выражений. Пока, как мы видели, один момент, в котором эти подходы различаются, это референты рассматриваемых терминов. Это приводит нас к следующим альтернативам:

(А) Оба правы в своих убеждениях: каждый подход содержит условия, необходимые по отдельности и достаточные в совокупности. Следовательно, $3 = \{\{\{\emptyset\}\}\}$ и $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

(В) не оба подхода верны; т.е. по крайней мере один содержал условия, которые были не необходимы и, возможно, не содержал дополнительных условий, которые, в совокупности с оставшимися, образовали бы набор достаточных условий.

Вариант (А), разумеется, абсурден. Поэтому нам надо исследовать (В).

Оба подхода сходятся в общей структуре. Они расходятся, когда дело доходит до установления референтов для рассматриваемых терминов. Опираясь на отождествление чисел с некоторым определенным множеством множеств, два подхода в общем сходятся в отношениях, определенных на этом множестве; в рамках обоих у нас есть то, что наглядно является рекурсивной прогрессией и функцией следующего элемента, соответствующей порядку на этой прогрессии. Более того, понятия мощности определены с помощью прогрессии, обеспечивая то, что для каждого n тот факт, что множество содержит n элементов тогда и только тогда, когда для него может быть установлено взаимно-однозначное соответствие со множеством чисел меньших либо равных n , становится теоремой. В довершении всего, обычные арифметические операции определены для этих «чисел». Различаются они в способе определения мощности множества, поскольку в подходе Эрнст тот факт, что число n содержит n элементов, использовался для определения понятия содержания n элементов. Во всех остальных аспектах, тем не менее, они сходятся.

Следовательно, если не одновременно $3 = \{\{\{\emptyset\}\}\}$ и $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, а это определенно не так, тогда по крайней мере один из соответствующих взглядов неверен и, как результат, содержит условие, которое не является необходимым. Он может быть неверен и в других аспектах, но по крайней мере этот ясен. Я опять же могу отметить две возможности: либо все только что перечисленные условия, которые разделяют оба этих подхода, необходимы для корректного и полного рассмотрения, либо же некоторые нет. Предположим, что имеет место первый случай, хотя я и оставляю право отбросить это предположение, если потребуется поставить его под сомнение.

Если все разделяемые ими условия необходимы, тогда необходимо найти избыточные условия среди тех, что не являются общими. Опять есть две возможности: либо по крайней мере один из подходов, удовлетворяющих условиям, которые мы предполагаем необходимыми, и сопоставляющий определенное множество каждому числу, верен, либо ни один не верен. Ясно, что оба они не могут быть верны, поскольку они даже не экстенционально эквивалентны, тем более не интенционально. Следовательно, ровно один верен, или ни один не верен. Но тогда верным подходом должен быть тот, который выявил, какое множество множеств является *на самом деле* числами. Мы столкнулись с принципиальной проблемой: если существует такой «верный» подход, то существуют ли также аргументы, которые покажут, что он и есть верный? Или же существует определенное множество множеств b , *действительно* являющееся числами, но такое, что не существует аргументов, которые можно было бы привести, чтобы показать, что именно оно, а не, скажем, множество Эрнст $\mathfrak{N}$ на самом деле является числами? Представляется, вместе с тем, слишком очевидным, что последний вариант граничит с абсурдом. Если числа образуют одно определенное множество множеств, и не другое, тогда должны существовать аргументы, выявляющие какое именно. Настаивая на этом, я не беру себя обязательство доказательно разрешить любой математический вопрос, поскольку я не предполагаю ни, что это математический вопрос, ни, что это подлежит доказательству. Ответ на вопрос, который я поднял, будет следовать из анализа вопроса формы «Верно ли, что $n = \dots$?». Пока будет достаточно отметить различие между нашим вопросом и

Есть ли наибольшее простое число p , такое, что $p + 2$ также простое?

или даже

Существует ли бесконечное множество действительных чисел не эквивалентных ни множеству целых чисел, ни множеству всех действительных чисел?

Ожидая озарения в вопросе истинной сущности 3 , мы не ожидаем доказательства некой глубокой теоремы. Добравшись так далеко, как мы уже смогли без установления подлинной природы 3 , мы не можем продвинуться дальше. Мы не знаем, как *могло бы* выглядеть доказательство этого. Понятие «верного подхода» срывается со своих якорей, если мы допускаем возможное существование необоснованных, но верных ответов на вопросы подобные этому. Принять серьезно вопрос «Верно ли, что $3 = \{\{\{\emptyset\}\}\}$?» *просто* (и не сжато для «в подходе Эрнст?»), при отсутствии какого-либо способа установить его истинность, значит полностью дезориентироваться. Нет, если у такого вопроса есть ответ, аргументов, поддерживающих его, и если нет таких аргументов, тогда нет «верного» подхода, который

бы выделялся среди всех подходов, удовлетворяющих условиям, о которых мы упоминали несколько страниц назад.

Как же тогда можно распознать верный подход среди всех возможных? Есть ли множество множеств, которое имеет больше оснований быть числами, чем любое другое? Есть ли аргументы, которые можно было бы предложить, чтобы выделить это множество? Фреге выбрал в качестве числа 3 расширение концепта «эквивалентен с некоторым трехэлементным множеством», т.е. для Фреге число было классом эквивалентности – классом всех классов, эквивалентных данному классу. Несмотря на привлекательность этого подхода, не видно причин для того, чтобы рекомендовать его по сравнению, скажем, с подходом Эрни. Было заявлено, что это более подходящий подход, поскольку числовые слова на самом деле являются предикатами классов, и что этот подход обнаруживает этот факт. Утверждение состоит в том, что говоря о том, что есть n объектов F , вы выражаете n -ность F , также как говоря, что красный является цветом, вы выражаете цветность красного. Я не думаю, что это правда. Не думает так и Фреге (1950: часть 57). Определенно верно, что высказывание

(1) В зоопарке находится семнадцать львов.

не выражает семнадцать-ность каждого конкретного льва. Я полагаю, что также верно, что если в зоопарке находится семнадцать львов и также семнадцать тигров, то классы львов-в-зоопарке и тигров-в-зоопарке вместе находятся в классе, однако мы к этому вернемся. Из этого не следует, что (1) выражает семнадцать-ность одного из этих классов. Во-первых, грамматические свидетельства этого на самом деле скудны. Лучшее, что можно придумать среди примеров, в которых числовое слово встречается в позиции предиката, является весьма искусственным, подобно

(2) Львы в зоопарке семнадцать.

Если мы не интерпретируем это как высказывание о возрасте зверей⁶, тогда мы видим, что такое высказывание не выражает ничего в отношении конкретного льва. Можно поддаться искушению анализировать (2) как именное словосочетание «Львы в зоопарке», за которым следует глагольное словосочетание «(являются) семнадцать», при котором анализ строится на параллелях с высказыванием

(3) Чероки являются вымирающим (племенем)

⁶ Английское высказывание «The lions in the zoo are seventeen.», приведенное автором в оригинальном тексте, может иметь значение и «Львы в зоопарке семнадцать.», и «Львам в зоопарке семнадцать (лет).», именно для устранения этой кажущейся осмысленности в английском языке и приводятся некоторые дополнительные рассуждения автора. Для русскоязычного читателя они даже излишни. – *Прим. пер.*

в котором именное словосочетание ссылается на класс и глагольное словосочетание выражает нечто об этом классе. Но эта параллель мимолетна. Поскольку вскоре мы замечаем, что (2), вероятно, появилось в языке⁷ как сокращение

(4) Львы в зоопарке числом семнадцать

что, в свою очередь, возможно, происходит от чего-то вроде

(5) Семнадцать львов в зоопарке.

Сейчас не уместно исследовать в деталях грамматику числовых слов. Будет достаточно указать, что они во многих важных отношениях отличаются от слов, которые мы не сомневаясь называем предикатами. Возможно, чем-то наиболее близким по отношению к общему предикату классов, включающим числовые слова, являются конструкции вроде «семнадцатизначного» или «имеющего семнадцать элементов». Но шаг отсюда до того, чтобы «семнадцать» было само предикатом классов, на самом деле весьма велик. Фактически, я думаю, что указание на два предыдущих предиката само выдает недостатки – поскольку, каков должен быть анализ «семнадцати», как оно появляется в тех фразах? Грамматические свидетельства этой точки зрения не просто скудны, представляется, что есть значительные свидетельства против нее, что немедленно обнаружит исследование функций числовых слов и «много», «немного», «все», «несколько», «сколько-нибудь» и т.д. Подобающее изучение этих вопросов придется отложить до другого случая, но непредикативная природа числовых слов может быть также замечена, если отметить, как они отличаются от, скажем, обычных прилагательных, которые действительно выполняют функции предикатов. Мы уже видели, что числовые слова не встречаются в типичном для предикатов положении (т.е. в «есть ...»), единственный мнимый случай попадает в рамки (2) выше, и потому довольно неправдоподобен. Другая аномалия состоит в том, что числовые слова в нормальной ситуации имеют более высокий ранг, чем *все* прилагательные (или все остальные прилагательные, если кто-то хочет их классифицировать таким образом), что выражается в том, что они появляются в начале строки из прилагательных, но не внутри. Это настолько сильное ранжирование, что его нарушение неминуемо приводит к нарушению грамматической структуры:

(6) Пять милых маленьких квадратных голубых плиток

звучит хорошо, но любое изменение позиции «пять» порождает грамматически некорректную строку; и чем дальше направо, тем хуже.⁸

⁷ См. сноску 6 выше. – *Прим. пер.*

Дополнительные причины для отбрасывания предикативной природы числовых слов дает нам обычный анализ первого порядка высказываний на подобие (1), с которых мы начали. Поскольку они обычно анализируются как:

$$(7) (\exists x_1) \dots (\exists x_{17})(Lx_1 \cdot Lx_2 \cdot \dots \cdot Lx_{17} \cdot x_1 \neq x_2 \cdot x_1 \neq x_3 \cdot \dots \cdot x_{16} \neq x_{17} \cdot (y)(Ly \supset y = x_1 \vee y = x_2 \vee \dots \vee y = x_{17})$$

Единственный предикат в (1), который остается – это «львы в зоопарке», «семнадцать» уступает числовым квантификаторам, функциям истинности, переменным и вхождению «=», если, конечно, кто-либо не желает рассматривать это также как предикаты классов. Но основания для мнения о том, что (1) или (7) выражает семнадцать-ность классу львов в зоопарке, на самом деле хрупкие. Числовые слова работают во многом как операторы подобные «все», «некоторые» и т.д., так что готовность сделать из них имена классов должна сопровождаться готовностью провести соответствующее преобразование по отношению к квантификаторам, тем самым доказывая (традиционным философским образом) существование одного, многого, малого, всего, нескольких, сколько-нибудь, каждого, не-которого и всякого.⁹

Но тогда, какие доводы *есть* в поддержку этого взгляда? Ну, только такие: если два класса каждый имеют семнадцать членов, тогда, вероятно, существует класс, который содержит их оба в силу этого факта. Я говорю «вероятно», поскольку это варьируется от теории множеств к теории множеств. Например, это не имеет места в теории типов, поскольку два класса должны оба иметь один тип. Но в не непротиворечивый теории утверждение о том, есть ли класс всех классов с 17 членами, по меньшей мере не лежит в рамках стандартного теоретико-множественного аппарата. Но существование парадоксов само по себе серьезная причина отказать «семнадцати» однозначной роли указателя класса всех классов с семнадцатью членами.

Я думаю, таким образом, что мы можем заключить, что «семнадцать» *не следует* рассматривать как предикат классов, и точно также нет необходимости рассматривать 3 как множество всех триплетов. Это не означает отрицание того, что «является классом с тремя

⁸ Можно было бы подумать, что конструкции на подобие:

(i) Голодных пять шло домой

составляют контрпример к тезису о том, что числовые слова должны следовать первыми в строках прилагательных. Но они не составляют. Поскольку в (i) и похожих случаях числовое слово присутствует как существительное, вероятно, происходя от:

(ii) Пять голодных ИС_{мн} шли домой

путем очевидных преобразований, и должны быть понимаемы именно таким образом. Есть несколько истинных контрпримеров, но эта проблема слишком запутана для обсуждения здесь.

⁹ И на самом деле, почему не «Я один, кто отдал все его самое дорогое в борьбе за малое против многих»?

членами» есть предикат классов, но это на по сути другое дело. Поскольку это следует из всех рассматриваемых подходов.¹⁰ Наша текущая задача состоит в том, чтобы увидеть, есть ли подход, который, и ни какой другой, мог бы быть установлен, тем самым решив вопрос о том, каким множеством на самом деле являются числа. И сейчас должно быть ясно, что такого подхода нет. Любая цель, которую мы можем перед собой ставить в подходе к понятию числа и конкретным чисел, в отличие от порождающего много вопросов подхода к доказательству того, что правильное множество множеств является множеством чисел, будет практически эквивалентно хорошо (или плохо) достигнута в рамках любого из бесконечного числа подходов, удовлетворяющих так кропотливо нами установленным условиям. Нет большой необходимости проверять все возможности детально, если уж традиционно предпочитаемые подходы Фреге и Рассела оказались не однозначно подходящими.

К чему это нас привело? Я настаивал, что по большей мере один из бесконечного числа различных подходов, удовлетворяющих нашим условиям, может быть верен, на основании того, что они даже не экстенсивно эквивалентны, и, следовательно, по меньшей мере все кроме одного, или, возможно, все, содержат условия, которые не необходимы и которые приводят к отождествлению чисел с некоторым определенным множеством множеств. Если числа являются множествами, тогда они должны быть *определенными множествами*, поскольку каждое множество – это некоторое определенное множество. Но если число 3 на самом деле является одним множеством, а не другим, тогда должно быть возможно предоставить какой-либо неоспоримый довод для того, чтобы думать так; поскольку позиция, что это непознаваемая истина вряд ли разумна. Но кажется, что среди подходов нечего выбирать. Соответственно нашим целям в формировании подхода к этому вопросу, каждый будет действовать так же хорошо, как и остальные, за исключением стилистических предпочтений. Нет способа, связанного со связями числовых слов, который бы позволил нам выбрать из них, *поскольку подходы различаются в областях, где нет связи между какими-либо особенностями подходов и нашим использованием рассматриваемых слов*. Если все выше обосновано, тогда нельзя ничего заключить кроме как, что любое свойство подхода, отождествляющего 3 со множеством является избыточным, и что, следовательно, 3 и прочие числа, не могут быть множествами вовсе.

¹⁰ В рамках границ, налагаемых непротиворечивостью.

III. Выход

В третьей и последней части я рассмотрю и предложу некоторые соображения, которые, как я надеюсь, добавят убедительности к предыдущей части, хотя бы и от противного. Затронутые вопросы, несомненно, так многочисленны и сложны, и покрывают такой широкий спектр философских проблем, что в этой статье я не могу более чем обозначить, что, по моему мнению, они собой представляют и как, в общем, я думаю, они могут быть решены. Я надеюсь, тем не менее, что более позитивный подход возникнет на основании этих соображений.

А. Тождество. В течение первых двух частей я пользовался выражениями вида

$$(8) \quad n = s,$$

где n – числовое выражение, а s – выражение, содержащее множества, так как, будто бы они имели совершенно ясный смысл, и это была наша работа, разделять в них истинные от ложных.¹¹ И получилось, что я сделал вывод, что все такие утверждения были ложны. Я сделал это, чтобы подчеркнуть тип ответа, который мог бы дать Фреге на вопрос об анализе числа – указать тип вопроса, как его принял Фреге. Поскольку он явно хотел, чтобы анализ определил точное значение для каждого такого тождества. Фактически, он хотел определить смысл результата замены s на любое имя или какое-либо описание (тогда как обычно считается, что выражение именуется числом, стоящее в позиции n). Исходя из симметричности и транзитивности отношения тождественности, было рассматривалось типа тождеств, удовлетворяющих этим условиям, соответственно трем типам выражений, которые могут появиться в правой части:

- (a) с некоторым арифметическим выражением справа, также как и слева (например, $2^{17} = 4\,892$ и т.д.);
- (b) с выражением, обозначающим число, но не стандартным арифметическим способом, на подобие «числа яблок в горшке» или «числа объектов F » (например, $7 = \text{число гномов}$);
- (c) с указывающим выражением, не относящимся ни к одному из вышеназванных типов, как «Юлий Цезарь», « $\{\{\emptyset\}\}$ » (например, $17 = \{\{\{\emptyset\}\}\}$).

¹¹Я был рад обнаружить, что некоторые моменты моего рассуждения о Фреге были сделаны совершенно независимо Чарльзом Парсонсом (Charles Parsons) (1965). Я обязан его рассуждениям несколькими улучшениями.

Требование о том, чтобы обычные законы арифметики следовали из подхода обеспечивает нам все тождества первого типа. Добавление объяснения концепта мощности множества будет достаточным для тождеств типа (b). Но включив тип (c), Фреге встал перед необходимостью поиска некоторых «объектов», которые бы называли числовые слова, и с которыми числа были бы тождественны. Именно в этот момент вопрос о том, каким множеством объектов *действительно* являются числа начал требовать ответа, поскольку, очевидно, простой ответ «числами» не устраивал. Если говорить с позиции Фреге, то есть мир объектов – то есть, десигнат ссылок имен, описаний и т.д. – в котором отношение тождественности вольно царствует. Для Фреге имеет смысл вопрос, именуют ли два *произвольных* имени (или описания) один и тот же объект или различные объекты. Отсюда и заявление в одном из пунктов его аргументации, что до сих пор никто не может сказать на основании его определений, являлся ли Юлий Цезарь числом.

Я сильно сомневаюсь, что для того, чтобы объяснить использование и значение числовых слов потребуется решить, был ли (есть ли) Юлий Цезарь или не был числом 43. Настоячивое требование Фреге того, что это должно быть сделано, проистекает, я думаю от его (очевидно) противоречивой логики (интерпретируемую достаточно широко для того, чтобы охватывать теорию множеств). Все предметы (имена) во вселенной были равны, и вопрос, имеют ли два имени один и тот же референт всегда, по-видимому, имел ответ – да или нет. Противоречивость логики, из которой это проистекало, является, разумеется, *некоторой* причиной для того, чтобы отнестись к такому взгляду с подозрением. Но это едва ли опровержение, поскольку можно допускать осмысленность всех утверждений тождественности, существования универсального множества как множества значений отношения, но все еще иметь достаточно ограниченные принципы существования множества для того, чтобы избежать противоречивости. Но такой взгляд, разошедшийся с наивной теорией множеств, из которой он происходит, теряет большую часть своей привлекательности. Я осторожно предполагаю, что мы смотрим на проблему по-разному.

Я предлагаю отбросить предположение о том, что все тождества осмысленны, в частности, отказаться от всех вопросов формы (c) выше как бессмысленных или «несемантичных» (они не абсолютно бессмысленны, поскольку мы уяснили достаточно их смысла, чтобы объяснить, почему они бессмысленны). Утверждения тождественности имеют смысл только в контексте, в котором возможны условия индивидуализации. Если выражение « $x = y$ » должно иметь смысл, то это может быть только в контексте, в котором понятно, что как x , так и y относятся к одному типу или категории C , и что это условия, которые индивидуализируют предметы *как то же C* , являются действующими и определя-

ют его истинное значение. Пример может помочь прояснить этот момент. Если мы знаем, что x и y являются фонарными столбами (возможно, одинаковыми, но ничего в том способе, которым они обозначены, не отвечает на этот вопрос), тогда мы можем задать вопрос, являются ли они одним и *тем же фонарным столбом*. Именно их цвет, история, масса, положение и т.д. будет определять, являются ли они на самом деле одним и тем же фонарным столбом. Подобным образом, если мы знаем, что z и w являются двумя числами, тогда мы можем спросить, являются ли они *один и тем же числом*. И именно то, являются ли они простыми, большими 17 и т.д., будет определять, являются ли они на самом деле одним и тем же числом. Но точно также как мы не можем индивидуализировать фонарный столб с помощью этих последних предикатов, также мы не можем индивидуализировать число с помощью его массы, цвета или подобных соображений. То, что определяет, что нечто есть *определенный фонарный столб*, не может индивидуализировать его как *определенное число*. Я заявляю, что вопрос тождественности определенной «сущности» не имеет смысла. «Сущность» – это слишком широко. Для того, чтобы подобные вопросы имели смысл, должен быть полностью устоявшийся предикат C , с помощью которого затем можно бы было задавать вопросы о тождественности *определенного C* , и условия, связанные с отождествлением объектов C как *таких же C* будут играть решающую роль. Следовательно, если для двух предикатов F и G не существует третьего предиката C , который бы относил обоих к какой-либо группе и который бы был связан с некоторыми однородными условиями для отождествления двух предполагаемых элементов как одного и того же (или различных) объектов C , то утверждения тождественности, пересекающие границы F и G будут бессмысленны.¹² Например, будет иметь смысл спросить о некотором x (являющемся на самом деле стулом), является ли он таким же ... как y (являющимся на самом деле столом). Поскольку мы можем заполнить пробел предикатом «предмет мебели», и мы знаем, что значит для a и b быть одним и тем же или различными предметами мебели. С другой стороны, вопросы о тождественности содержат предпосылку о том, что задействованные «сущности» принадлежат некоторой общей категории. Предпосылка обычно обеспечивается контекстом теории (т.е. более систематичным контекстом). Сказать, что они оба «сущности» значит не делать ни каких предпосылок – по меньшей мере в общем смысле. «Сущность», «предмет», «объект» – это слова, играющие определенную

¹² Для того, чтобы сформулировать точный подход, будет необходимо объяснить «однородные условия», таким образом, чтобы исключить очевидные контрпримеры, полученные при помощи построения специально подобранных дизъюнктивных условий. Но обсуждение способа достижения этого увело бы нас слишком далеко. Я не претендую на знание ответа в каких-либо подробностях.

роль в языке; они помещают заполнители, функция которых аналогична местоимениям (и, в более формализованном контексте, переменным квантификации).

Тождество есть «та-же-объектность»¹³, но только в рамках узко ограниченных контекстов. Или иначе, то, что составляет сущность является категорией или зависимым от теории. На самом деле, есть два взаимосвязанных способа рассмотрения проблемы. Можно заключить, что тождественность систематически неоднозначна, или же можно согласиться с Фреге, что тождественность однозначна, всегда означает единообразие объекта, но что (вопреки Фреге теперь) понятие *объекта* варьируется от теории к теории, категории к категории, и что, следовательно, его ошибка состояла в том, что он не отдавал себе отчета в этом факте. Именно последнее я и заявляю, поскольку оно обладает тем достоинством, что сохраняет тождество как общее логическое отношение, применение которого в данном произвольном хорошо определенном контексте (т.е., таком, в котором понятие объекта однозначно) остается беспроблемным. В таком случае логика может продолжать рассматриваться как наиболее общая дисциплина, единообразно применимая к и в рамкой любой конкретной теории. Она остается инструментом, применимым ко всем дисциплинам и теориям, с той только разницей, что она оставляет дисциплине или теории решать, что должно считаться «объектом» или «единичностью».

То, что этот подход не невероятен, также подсказывается и языком. Контексты формы «такой же *G*» очень многочисленны, и, действительно, именно с их помощью тождественность и должна объясняться, поскольку, что должно будет считаться таким же *G*, будет сильно зависеть от самого *G*. Тот же человек должен будет быть индивидуумом; «тот же акт» является описанием, которому может удовлетворять много конкретных актов, или же только один, поскольку индивидуализирующие условия актов делают их иногда типами, иногда элементарными значениями. Очень редко в языке встречаются контексты, открытые для (применимые для) какого угодно произвольного вида «предмета». Есть, например, некоторые «Упоминаемые Сэмом ...», «Припоминаемые Хелен ...» – и представляется совершенно нормальным спросить, является ли то, о чем упоминал Сэм, тем, о чем припоминала Хелен. Но эти контексты очень немногочисленны и, кажется, все являются интенциональными, что отбрасывает соответствующую тень, покрывающую роль, которую играет в них тождественность.

Кто-то захочет заявить, что тождества типа (с) не бессмысленны или несемантические, но просто ложны, на том основании, что разграничение категорий не может быть проведено.

¹³ В оригинальном английском тексте это выражение обыгрывается автором через разбиение слова identity: «Identity is id-entity...» – Прим. пер.

Я могу предложить только следующий аргумент в противовес этому взгляду. Будет практически также тяжело объяснить, каким образом кто-то знает, что они ложны, как объяснить, каким образом кто-то знает, что они бессмысленны, поскольку обычно мы знаем о ложности некоторого тождества « $x = y$ » только, если мы знаем о x (или y), что он обладает какими-то характеристиками, о которых нам известно, что ими не обладает y (или x). Я знаю, что $2 \neq 3$, потому что я знаю, например, что 3 нечетно, а 2 нет, хотя кажется очевидно неверным заявлять, что мы знаем, что $3 \neq \{\{\{\emptyset\}\}\}$ потому что, скажем, мы знаем, что у 3 нет ни одного (или семнадцати, или бесконечно много) элементов, тогда как у $\{\{\{\emptyset\}\}\}$ есть ровно один. Мы не знаем этой вещи. Мы не знаем, верно ли это. Но это не составляет знания о том, что это неверно. Что привлекательно в таком взгляде о том, что все эти утверждения ложны, так это, конечно, то, что они вряд ли являются открытыми вопросами, на которые мы сможем в определенный день найти ответы. Ясно то, что если для обоих рассматриваемых подходов, на их основе сейчас не существует решения, то его никогда и не будет существовать. Но для наших целей различие между этими двумя взглядами не очень серьезны. Я определенно удовлетворюсь выводом о том, что все тождества типа (с) либо бессмысленны, либо ложны.

В. Экспликация и редукция. Я бы хотел сейчас подойти к вопросу с несколько другой стороны. В течение этой статьи я по большей части обсуждал взгляд Фреге, стремясь пролить какой-то свет на значение числовых слов, обнажая сложности, которые возникают при попытке определить, какими объектами на самом деле являются числа. Все рассмотренные нами исследования содержали условие о том, что числа являются множествами, и что, следовательно, каждое конкретное число является конкретным множеством. Мы пришли к выводу в конце Части II, что числа вовсе не могут быть множествами, на том основании, что у нас нет обоснованных причин говорить, что некоторое конкретное число является некоторым конкретным множеством. Чтобы усилить нашу аргументацию, может быть полезно кратко рассмотреть два действия, тесно связанных с постулированием того, что числа *являются* множествами, – экспликацией и редукцией.

Чтобы дать экспликацию числа, философ может иметь в качестве части своей экспликации утверждение о том, что $3 = \{\{\{\emptyset\}\}\}$. Следует ли отсюда, что он делает ошибку такого же рода, в которой я обвинял Фреге? Я думаю, нет. Поскольку есть различие между *утверждением* того, что 3 является множеством всех триплетов и *отождествлением* 3 с таким множеством, что может быть сделано в контексте некоторой экспликации. Я определенно не хочу, чтобы сказанное мною в этой статье, выступало против отождествления

3 с чем-либо, что вам угодно. Различие состоит в том, что обычно, когда кто-то отождествляет 3 с некоторым конкретным множеством, то он делает это с целью представить некоторую теорию, и не желает заявления о том, что он *обнаружил*, каким объектом на самом деле является 3. нам может быть интересно узнать, будет ли некоторое множество (или отношения и т.д.) выступать в качестве заменителя чисел. В рамках исследования этого вопроса будет абсолютно правомочно утверждать, что в случае установления такого тождества, мы можем делать с этим множеством (и этими отношениями) то, что мы сейчас делаем с числами. Поэтому мы можем найти у Куайна:

Фреге рассматривает вопрос «Что есть число?», показывая каким образом функции, которые мы могли бы ожидать у рассматриваемых объектов, могут выполняться объектами, природа которых предполагалась далекой от нашего обсуждения. (Куайн 1960: 262)

Оставляя без внимания, является ли это корректной интерпретацией Фреге, мы можем утверждать, что тот, кто это говорит, не стал бы заявлять, что, поскольку ответ оказался «Да», то ясно, что числа на самом деле всегда были множествами. В таком контексте адекватность некоторой системы объектов нашей задаче является вполне реальной проблемой и может быть установлена. В рамках нашего исследования, *любая* система объектов, множеств или же не множеств, которая образует рекурсивную прогрессию, должна быть адекватна. Следовательно, обнаружение того, что другая система будет очень хорошо справляться с задачей, не может означать, что мы обнаружили, какими объектами являются числа. Экспликация в таком упрощенном смысле, является, следовательно, нейтральной по отношению к тому типу проблем, которые мы обсуждаем, но она действительно проливает некоторый отрезвляющий свет на вопрос о том, что значит быть конкретным числом.

Есть другая причина отвергнуть легитимность использования сводимости арифметики к теории множеств как довода в пользу заявления о том, что в конечном итоге числа действительно являются множествами. Гаиси Такеути (Gaisi Takeuti) показал, что теория множеств Геделя-фон Неймана-Бернея в сильном смысле сводима к теории ординальных чисел меньших, чем наименьшее недостижимое число (1954). Не удивительно, что числа являются множествами, раз уж множества на самом деле являются (оринальными) числами. Но в таком случае, что чем является?

Эти короткие замечания по поводу редукции, экспликации и того, что, считается, они привносят в математику привели нас назад к цитате из Ричарда Мартина, озаглавливаю-

щей эту статью. Мартин корректно указывает, что интерес математика заканчивается на уровне структур. Если одна теория может быть смоделирована в другой (т.е. сведена к другой), тогда дальнейшие вопросы о том, являются ли отдельные объекты одной теории на самом деле теми же, что и во второй, просто не возникает. В этом же отрывке Мартин продолжает (и я с одобрением принимаю это), что философ не удовлетворяется таким урезанным восприятием вещей. Он хочет знать больше и задает вопросы, к которым у математиков не проявляется интереса. Я соглашусь. Не проявляется. И совершенно ошибочно. Основная идея оставшейся части статьи будет состоять в том, что такие вопросы не раскрывают сути того, о чем, по меньшей мере, вся арифметика.

С. Заключение: числа и объекты. Было указано выше, что любая система объектов, множеств или же не множеств, которая образует рекурсивную прогрессию, должна быть адекватной. Но это странно, поскольку любое рекурсивное множество может быть упорядочено в рекурсивную прогрессию. Так по каким причинам, на самом деле, нет ни каких условий на объекты (т.е. на множества), но есть скорее условия на отношения, на основании которого они образуют прогрессию. С другой стороны – и в этом суть дела – произвольная любая рекурсивная последовательность будет предполагать, что важна не индивидуальность каждого элемента, а структура, которую они в совокупности представляют. Это весьма поразительная особенность. На основании одного только этого факта можно ожидать, как оно и есть на самом деле, что вопрос о том, является ли определенный «объект», например, $\{\{\{\emptyset\}\}\}$, заменителем для числа 3, будет в крайней степени бессмысленным. «Объекты» не выполняют в одиночку функций чисел; либо все система справляется с задачей, либо ничто не справляется. Я на этом основании заявляю, расширяя аргумент, приведший к заключению о том, что числа не могут быть множествами, что числа не могут быть объектами вообще; поскольку нет причин отождествлять любое конкретное число с любым конкретным объектом, а не с каким-либо другим (про которого пока не известно, что он является числом).

Бессмысленность попытки определения, какими объектами являются числа, следовательно, происходит из бессмысленности постановки вопроса для любого конкретного числа. Для целей арифметики, свойства чисел, которые не вытекают из тех отношений, в которых они находятся по отношению к другому в силу своей упорядоченности в прогрессию, не имеют ни какого значения. Но только эти свойства будут выделять число как тот или иной объект.

Следовательно, числа вовсе не являются объектами, поскольку указывая (необходимые и достаточные) свойства чисел вы просто характеризуете *абстрактную структуру*, и различие основывается на том факте, что «элементы» структуры не имеют свойств, отличных от связывающих их с другими «элементами» этой же структуры. Если мы отождествляем абстрактную структуру с системой отношений (интенционально, разумеется, или же со множеством всех отношений, экстенционально изоморфных данной системе отношений), то мы получаем арифметику, представляющую свойства отношения «менее чем», или всех систем объектов (т.е. *конкретных* структур), представляющих эту абстрактную структуру. Из того, что система объектов представляет структуру целых чисел, следует, что элементы этой системы обладают некоторыми свойствами, не зависящими от этой структуры. Тогда должно быть возможно индивидуализировать эти объекты независимо от той роли, которые они играют в структуре. Но именно это мы и не можем сделать в случае чисел. Быть числом 3 значит не более и не менее, чем иметь предшествующими числа 2, 1 и, возможно, 0, и последующими – числа 4, 5 и т.д. И быть числом 4 значит не более и не менее, чем иметь предшествующими числа 3, 2, 1 и, возможно, 0, и последующими – ... Любой объект может *играть роль* 3, т.е. любой объект может быть третьим элементом некоторой прогрессии. Характерной особенностью числа 3 является то, что оно определяет эту роль, но с помощью того, что оно является образцом для любого объекта, который ее играет, а при помощи того, что представляет отношения, в которых находится этот произвольный третий элемент прогрессии с остальной прогрессией.

Тем самым, арифметика является наукой, которая представляет абстрактную структуру, которую имеют все прогрессии в совокупности, просто в силу того, что являются прогрессиями. Это не наука, работающая с конкретными объектами – числами. Исследование, в котором числа оказываются на самом деле независимо различаемыми конкретными объектами (множествами? Юлием Цезарем?) являются ошибочными.

С этой точки зрения, многие вещи, которые озадачивали нас в этой статье, оказываются на своем месте. Становится очевидным, почему возможно так много интерпретаций теории чисел, при том, что не одна не является уникально выделенной: нет уникального множества объектов, которое бы являлось числами. Теория чисел – это представление свойств всех структур чисел упорядоченного типа. У числовых слов нет отдельных референтов. Более того, тот факт, что критериальное отождествление чисел с объектами работает в случае совокупности, но перестает работать в случае пообъектного отождествления, является следствием того, что теория представляет абстрактную структуру, но не свойства независимых индивидуальных объектов, каждый из которых может быть охарактеризован

без ссылок на отношения с остальными. Только в случае, когда мы рассматриваем определенную последовательность не как числа, а как *структуру чисел*, вопрос о том, какой элемент является, или, лучше, *соответствует*, 3 начинает приобретать смысл.

Лозунги вроде «Арифметика работает с числами», «Числовые слова ссылаются на числа» могут быть интерпретированы двумя весьма различными способами: (1) что числовые слова не являются именами особых нечисловых сущностей, как например, множества, помидоры, ящерицы-ядозубы; и (2) что полностью формалистский подход, в рамках которого не получается приписать какого-либо смысла утверждениям числовой теории, также неверен. Я заявляю здесь, что они по необходимости несовместимы.

Последний формализм слишком радикален. Но существует его модификация, также отрицающая, что числовые слова являются именами, которая образует правдоподобное и привлекательное расширение того взгляда, который я привел. Позвольте мне его здесь рассмотреть. С позиций этого взгляда, последовательность числовых слов является просто последовательностью слов или выражений с определенными свойствами. Нет двух видов вещей: чисел и числовых слов, но только один – сами слова. Многие языки содержат такие последовательности, и любая такая последовательность (слов или терминов) будет служить тем же целям, что и наши, при условии, что она в соответствующем смысле рекурсивна. При счете мы не устанавливаем связи между множествами и начальными частями чисел как внелингвистических сущностей, но устанавливаем связи между множествами и начальными частями последовательности числовых *слов*. Центральная идея состоит в том, что эта рекурсивная последовательность является своего рода линейкой, которую мы используем для измерения множеств. Вопросы об отождествлении референтов числовых слов должны быть отброшены на том же основании, на каком вопрос о референтах частей линейки был бы расценен как ошибочный. Хотя любая последовательность выражений с соответствующей структурой справлялось бы с задачами, для которых мы используем наши настоящие числовые слова, есть причина иметь одну, относительно унифицированную нотацию: обычное общение. Слишком много последовательностей в повседневном использовании вынудили бы нас выучить слишком много различных эквиваленций. Обычное возражение на такой подход – что существует различие между числами и числовыми словами, которое он не делает, я думаю, не работает. Оно делается на основании того, что «два», «zwei», «deux», «2» предполагаются «относящимися» к одному и тому же числу, хотя и являются *различными* словами (одно из них вообще не слово). Можно отметить различия между рассматриваемыми выражениями, а также схожести, без возникновения некоторых внелингвистических объектов, которые ими именуются. Для

этого требуется только указать на схожесть функций: в любой числовой системе будет важно именно то, для указания на какое место в системе используется определенное выражение. Все выражения выше обладают такой общей особенностью друг для друга и для двоичного использования «10»¹⁴, но не для его десятичного использования. «Двусмысленность» «10» может быть, следовательно, легко объяснена. Здесь мы опять видим связанный с последовательностями характер отдельных чисел, за тем только исключением, что он еще более строгий. Нельзя сказать, какое число представляет определенное выражение, не имея последовательности, частью которой оно является. Именно из его места в этой последовательности, т.е. из его отношения с остальными членами последовательности *и из правил, обеспечивающих использование последовательности в счете*, будет следовать его индивидуальность. Именно в силу этой последней причины я заявлял, вопреки Куайну, что понятие мощности множества должно быть явно включено в понятие числа (см замечание 2).

Более того, другие вещи также встают на свое место. Требование, обсуждавшееся в Части I, о том, что отношение «менее чем» должно быть рекурсивным наиболее просто объяснить с помощью рекурсивной нотации. В конце концов, вся теория рекурсивных функций наиболее осмысленна, когда рассматривается в тесной связи с нотацией, а не внелингвистическими объектами. Наиболее наглядно это проявляет себя в трех случаях: развитие теории систем Поста, машинах Тьюринга и в теории конструктивных ординалов, в которой работа открыто идет с рекурсивной нотацией для ординалов. Я не вижу причин, по которым это не должно быть верным также и для конечных ординалов. Поскольку множество *чисел* является рекурсивным тогда и только тогда, когда машина определенного вида может быть запрограммирована так, чтобы формировать их упорядоченным образом, т.е. формировать стандартную или каноническую нотацию для этих чисел, соответственно (обратному) порядку отношения «менее чем». Если бы отношение для нотации было бы не рекурсивным, предыдущая теорема бы не работала.

Также становится очевидным, почему каждый анализ чисел, когда либо представленный, содержал рекурсивное отношение «менее чем». Если то, что мы формируем, является нотацией, тогда наиболее естественный способ формирования состоит в том, чтобы дать рекурсивные правила для получения следующего элемента из произвольного имеющегося элемента, и надо иметь причины, чтобы отклониться от этого пути, (и быть слегка безумным), для того, чтобы формировать нотацию, а затем определять «менее чем», как я сделал на странице 9 выше в обсуждении требований рекурсивности.

¹⁴ $10_2 = 2_{10}$ – Прим. пер.

Более того, с этой точки зрения, мы изучаем элементарные арифметические операции как операции для кардиналов на маленьких множествах и расширяем их при помощи обычных алгоритмов. В таком случае арифметика становится арифметикой кардиналов на ранних стадиях, очевидным образом, и более сложные утверждения становится легко интерпретировать как *проекции* при помощи функций истинности, квантификаторов и рекурсивных правил, обслуживающих операции. Можно, тем самым, быть такого рода формалистом и не отбрасывать утверждения о том, что есть такая вещь как арифметическая истинность, отличная от выводимости в рамках данной системы. Можно даже объяснить то, что обычный формалист определенно не может: почему эти аксиомы были выбраны и какое из двух возможных состоятельных расширений мы должны применять в каждом конкретном случае.

Но мне следует остановиться на этом. Я не могу отстаивать этот взгляд детально, не написав при этом книгу. Возвращаясь ближе к нашим бедным заброшенным детям, я думаю, мы должны заключить, что их образование было плохо организовано – не с математической точки зрения, поскольку мы пришли к заключению, что нет существенной математической разницы между тем, что изучали они, и что знают обычные смертные, но с философской точки зрения. Они думают, что числа действительно являются множествами множеств, тогда как, по правде говоря, нет таких вещей как числа, что не то же самое, что сказать, что нет по крайней мере двух простых чисел между 15 и 20.